అధ్యాయము 2

సమితులు

(Sets)

2.1 పరిచయం

క్రింది ఉదాహరణలు గమనించండి.

1. యూక్లిడ్, పైథాగరస్, గాస్, లైబ్నిట్జ్, ఆర్యభట్ట, భాస్కరాచార్య
2. a,e,i,o,u
3. సంతోషం, దుఃఖం, కోపం, ఆతృత, ఆనందం, తికమకపడటం.
4. క్రికెట్, ఫుట్‌బాల్, ఖో-ఖో, కబడ్డీ, బాస్కెట్‌బాల్
5. 1, 3, 5, 7, 9.....

ఏం గమనించారు? ఉదాహరణ 1లో కొంతమంది గణిత శాస్త్రజ్ఞుల పేర్లు ఉన్నాయి. ఉదాహరణ 2లో ఆంగ్లభాషలోని అచ్చులున్నాయి. ఉదాహరణ 3లో కొన్ని ఉద్వేగాలు ఉన్నాయి. ప్రతి ఉదాహరణలో ఉన్న పేర్లు/అంశాలు/ వస్తువులు ఏదో ఒక విషయంలో పోలికను కలిగి వున్నాయని మనం గమనించవచ్చు. అనగా అవి అన్నీ ఒక సముదాయంగా ఏర్పడినాయి. ఉదాహరణ 4, 5 లలోని సముదాయాలను ఏమనవచ్చు?

గణితంలో కూడా మనం ఇలాంటి సముదాయాలను గమనించవచ్చు. ఉదాహరణకి సహజసంఖ్యలు, ప్రధాన సంఖ్యలు, ఒక తలంలోని చతుర్భుజములు మొదలగునవి. మనం ఇప్పటి వరకు చూసిన ఉదాహరణలన్ని సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాలు లేదా భావనలే. "సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్నే" సమితి అని అంటారు. గణితశాస్త్రంలో సమితి వాదాన్నే ఒక కొత్త భావనగా చెప్పవచ్చు. ఈ సమితి వాదాన్ని 'జార్జి కాంటర్' (1845-1918) అభివృద్ధి పరిచారు. ఈ అధ్యాయంలో మనం సమితులు, వాటి ధర్మాలు మరియు సునిర్వచిత వస్తువులు, సమితుల మూలకాలు, సమితుల రకాల గురించి నేర్చుకొంటాము.

2.2 సునిర్వచిత సమితులు

సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్నే 'సమితి' అంటామని మనం తెలుసుకున్నాం. సునిర్వచితం అనగా

1. సమితిలోని వస్తువులన్నింటికి ఒకే విధమైన సామాన్య పోలిక లేదా ధర్మం కల్గి ఉండాలి. మరియు
2. ఏదైనా ఒక వస్తువు సమితికి చెందినది, లేనిదీ నిర్ధారించేటట్లు ఉండాలి.

'సునిర్వచితం' గురించి మనం కొన్ని ఉదాహరణలతో అవగాహన చేసుకుందాం. క్రింది వాక్యాన్ని పరిశీలించండి. నీ తరగతిలో ఉన్న పొడవైన విద్యార్థులందరి సముదాయం.

పై వాక్యంలో వున్న ఇబ్బంది ఏమిటి? ఇక్కడ ఎవరు పొడుగు అనేది స్పష్టంగా నిర్వచించలేము. 'రిచా' తనకంటే పొడుగ్గా ఉన్న వారందరినీ పొడుగు వాళ్ళుగా నిర్ధారించింది. రిచా సమూహంలో 5 మంది విద్యార్థులున్నారు. 'యశోధర' కూడా తనకంటే పొడవైన వాళ్ళందరిని పొడుగు వాళ్ళుగా నిర్ధారించింది. ఆదే సమూహంలో 10 మంది విద్యార్థులున్నారు. 'గణపతి' పొడుగు వాళ్ళంటే 5 అడుగుల కంటే ఎక్కువ ఎత్తు వున్న వాళ్ళని నిర్ధారించాడు. అతని సమూహంలో ముగ్గురు విద్యార్థులున్నారు. వివిధ రకాల వ్యక్తులు వివిధ రకాల సమూహాలని సూచించుకున్నట్లుగా మనం గమనించవచ్చు. అందువలన ఈ సమూహాలు సునిర్వచితం కాదు. అనగా సరిగా నిర్వచింపబడలేదు.

ఇపుడు ఈ క్రింది వాక్యాన్ని పరిశీలిద్దాం :

నీ తరగతిలో ఉన్న మొత్తం విద్యార్థులలో 5 అడుగుల 6 అంగుళాలు కంటే ఎత్తైన వారు లేదా ఎత్తైన వారి సమూహం.

ఈ సందర్భంలో రిచా, యశోధర మరియు గణపతి అందరూ ఒకే సముదాయాన్ని సూచిస్తారు. ఇలాంటి సముదాయాలు ఒక సునిర్వచిత సమితిని ఏర్పరుస్తాయి.

ఇవి చేయండి

1. నీ నిజ జీవితంలోని 'సమితులు'కు 3 ఉదాహరణలు రాయండి.
2. క్రింద కొన్ని సమూహాలు ఇవ్వబడినవి. వాటిలో సునిర్వచిత సమితులును గుర్తించి (✓) తో సూచించండి.
   (i) నీ తరగతిలోని అందరిలో మంచి విద్యార్థుల సముదాయం
   (ii) ఎరుపు, నీలం, ఆకుపచ్చ, పసుపు, నలుపు
   (iii) 1,2,3,4,5,6,7,.... (iv) 1, 8, 27, 64, 125, ...

ప్రయత్నించండి

క్రింది సమూహాలలో ఏవి సమితులు అవుతాయో సూచించండి.

(i) అన్ని సరిసంఖ్యలు (ii) ఆకాశంలోని నక్షత్రాలు

(iii) 1, 3, 5, ….. బేసి ధన పూర్ణ సంఖ్యల సముదాయం

2.3 సమితులు మరియు సమితిలోని మూలకాలని సూచించడం

సాధారణంగా మనం సమితులను ఆంగ్ల భాషలోని పెద్ద అక్షరాలు A, B, C, X, Y, Z తో సూచిస్తాం. సమితులకు సంబంధించి కొన్ని ఉదాహరణలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

- అన్ని సహజసంఖ్యల సమితిని, Nతో సూచిస్తాం.
- పూర్ణ సంఖ్యల సమితిని, Zతో సూచిస్తాం.
- అకరణీయ సంఖ్యల సమితిని, Qతో సూచిస్తాం.
- వాస్తవ సంఖ్యల సమితిని, Rతో సూచిస్తాం.

పైన సూచించిన సమితులన్నీ సునిర్వచిత సముదాయాలే. ఎందుకంటే ఏదైన ఇచ్చిన సంఖ్యను దత్తసమితికి చెందుతుందా లేదా మనం నిర్ధారించవచ్చు. మూలకాలకు మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

T అనే అక్షరంతో ప్రారంభం అయ్యే వారంలోని అన్ని రోజులను సూచించే సమితిలోకి తీసుకున్నామనుకొందాం. అపుడు మనం 'Tuesday' మరియు 'Thursday' మాత్రమే పై సమితిలో ఉంటాయని, సోమవారం కాదని తెలుసు. అపుడు Tuesday మరియు Thursday ని T అక్షరంతో ప్రారంభం అయ్యే వారంలోని అన్ని రోజుల సమితికి "మూలకాలు" అంటాం.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

(i) సాధారణంగా N అనేది సహజ సంఖ్యాసమితిని సూచిస్తుందని మనకు తెలుసు. అప్పుడు 1,2, 3... సహజ సంఖ్యాసమితికి మూలకాలు అవుతాయి. కాని 0 (సున్న) Nకు మూలకం కాదు.

(ii) సమితి 'B' అనేది చతుర్భుజాల సమితి అనుకుంటే

B = {చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, రాంబస్, సమాంతరచతుర్భుజం, ...}

పై సమితి(B)లో మనం త్రిభుజం, ట్రెపీజియం మరియు శంఖువును చేర్చవచ్చా ? చేర్చలేము ఎందుకంటే త్రిభుజం మరియు శంఖువు ' B' సమితికి చెందవు. కాని ట్రెపీజియంను 'B' సమితిలో చేర్చవచ్చు.

దీన్నిబట్టి మనం ఏదైన ఒక వస్తువు ఒక సమితికి చెందితే దాన్ని వస్తువులు / మూలకాలు అంటారని చెప్పవచ్చు. చెందినది (belonging to) అని తెలుపటాన్ని మనం $\in$ గుర్తును సూచిస్తాం.

కావున $1 \in N$ అనగా మూలకం 1 సమితి N కు చెందుతుందని అర్థం అదేవిధంగా $0 \notin N$ అంటే మూలకం 0(సున్న) సమితి Nకు చెందదు అని అర్థం.

'సమితుల్ని' మనం అనేక విధాలుగా సూచించవచ్చు మరియు రాయవచ్చు. ఉదాహరణకి మనం ఆంగ్లభాషలోని అన్ని అచ్చుల సమితిని తీసికొంటే, దాన్ని ఈ క్రింది విధంగా రాయవచ్చు.

(i) V = {a, e, i, o, u}. ఇక్కడ మనం మూలకాలన్నింటినీ వరుసగా, ఒక జాబితాగా (curly) ఫ్లవర్ బ్రాకెట్లలో సూచించాం. దీన్ని సమితులను 'రోస్టర్ రూపంలో' రాయడం అంటాం. రోస్టర్ రూపంలో సమితికి చెందిన మూలకాలన్నింటిని రాసి, 'కామా' (,)లలో వేరుచేసి ఫ్లవర్ బ్రాకెట్లలో ఉంచుతాము.

(ii) V = {x : x అనేది ఆంగ్లభాషలోని ఒక అచ్చులు}

లేక V = {x | x అనేది ఆంగ్ల భాషలోని ఒక అచ్చు}

పై విధంగా సమితులని రాయటాన్ని 'సమితి నిర్మాణ రూపం' అని అంటాం. ఇక్కడ సమితిలోని మూలకాన్ని x (లేక y, z మొదలగు ఏవైన గుర్తులు)గా సూచిస్తాం. x ప్రక్కన ఒక (:) colon ఉంచి ఆ సమితికి చెందిన మూలకాల యొక్క లక్షణాలు లేదా ధర్మాలను రాస్తాం. మొత్తాన్నే ఫ్లవర్ { } బ్రాకెట్లలో ఉంచుతాం.

C = {2, 3, 5, 7, 11}, 13 కంటే తక్కువైన ప్రధాన సంఖ్యల సమితి అనుకొందాం.

పై సమితిని ఈ క్రింది విధంగా కూడా రాయవచ్చు.

C = {x | x, అనేది13 కంటే తక్కువైన ఒక ప్రధానసంఖ్య } లేదా

C = {x: x, అనేది 13 కంటే తక్కువైన ఒక ప్రదానసంఖ్య}.

ఉదాహరణ-1. ఈ క్రింది వాటిని రోస్టర్ మరియు సమితి నిర్మాణరూపంలో రాయండి.

(i) 42 ను భాగించగల అన్ని సహజసంఖ్యల సమితి.

(ii) 10 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్యల సమితి.

సాధన :

(i) B అనేది 42ను భాగించగల అన్ని సహజసంఖ్యల సమితి అనుకొంటే

B = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42} (రోస్టర్ రూపం)

B = {x : x అనేది 42ను భాగించగల సహజసంఖ్యల సమితి} (సమితి నిర్మాణరూపం)

(ii) A అనేది 10 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్యల సమితి అనుకొంటే

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} (రోస్టర్ రూపం)

B = {x : x అనేది 10 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్యల సమితి} (సమితి నిర్మాణరూపం)

గమనిక : (i) రోస్టర్ రూపంలో మూలకాలను ఏ క్రమంలలో రాశాము అనేదానికి ప్రాధాన్యత లేదు. ఎలాగైనా రాయచ్చు. పై ఉదాహరణ 1లో మనం {1, 3, 7, 21, 2, 6, 4, 42} అని కూడా రాయచ్చు.

(ii) సమితి యొక్క మూలకాలను రోస్టర్ రూపంలో రాసేటపుడు ఒకే మూలకాన్ని మరలా మరలా రాయకూడదు. ఉదాహరణకి "SCHOOL" అనే అక్షరాలతో ఏర్పడే సమితిని {S, C, H, O, L} అని సూచించాలి. {S, C, H, O, O, L} అని కాదు.

ఉదాహరణ-2. సమితి B = {x : x ఒక సహజ సంఖ్య మరియు $x^2 < 40$} ని రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.

సాధన : 1 నుంచి ప్రారంభమయ్యే సహజసంఖ్యలు మరియు వాటి వర్గాలను చూద్దాం. 7 దగ్గరకి వచ్చేసరికి 7 యొక్క వర్గం 49 అవుతుంది. మరియు 40 కంటే ఎక్కువ. కావున కావల్సిన సహజసంఖ్యలు 1, 2, 3, 4, 5, 6.

రోస్టర్ రూపంలో రాయబడిన సమితి B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సమితులలోని మూలకాల జాబితాను రాయండి.
   (i) G అనేది 20 కు రాయగల కారణాంకాలన్నింటి కలిగిన సమితి.
   (ii) F అనేది 17 మరియు 61 మధ్యగల 4 యొక్క గుణిజాలు మరియు 7 చే భాగించబడే మూలకాల సమితి
   (iii) S = {x : x అనేది 'MADAM' అనే పదంలో గల అక్షరాల సమితి}
   (iv) P = {x : x అనేది 3.5 మరియు 6.7 మధ్యగల పూర్ణాంకాల సమితి}
2. క్రింది సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.
   (i) B అనేది ఒక సంవత్సరంలో ఒక నెలకి 30 రోజులుగా గల అన్ని నెలల సమితి.
   (ii) P అనేది 10 కంటే తక్కువైన అన్ని ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.
   (iii) X అనేది ఇంద్రధనస్సులో గల అన్ని రంగుల సమితి
3. A అనేది 12కు కారణాలుగా గల సమితి. ఈ క్రింది వానిలో ఏది 'A' సమితికి చెందదు.
   (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

ప్రయత్నించండి

1. బీజగణిత మరియు రేఖాగణిత భావనలతో కొన్ని సమితులను మీరే ఎన్నుకొని ఏర్పరచండి.
2. రోస్టర్ రూపంతో, సమితి నిర్మాణ రూపంను జతపరచండి.

(i)	{P, R, I, N, C, A, L}	(a) $\{x : x$ ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య మరియు 18ను భాగించునది$\}$
(ii)	{0}	(b) $\{x : x$ ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $x^2 - 9 = 0\}$
(iii)	{1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c) $\{x : x$ ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $x + 1 = 1\}$
(iv)	{3, -3}	(d) $\{x : x$ అనేది PRINCIPAL అనే పదంలో ఉన్న అక్షరం$\}$

అభ్యాసం - 2.1

1. క్రింది వాటిలో ఏవి సమితులు? మీ సమాధానాన్ని సహేతుకంగా సమర్థించండి.
   (i) "J" అనే అక్షరంతో ప్రారంభమయ్యే ఒక సంవత్సరంలో గల అన్ని నెలల సమూహాలు.
   (ii) భారతదేశంలో గల అత్యంత ప్రతిభావంతులైన 10 మంది రచయితల సమూహం.
   (iii) ప్రపంచంలో గల 11 మంది బాగా క్రికెట్ ఆడేటటువంటి "బ్యాట్స్‌మెన్"ల టీమ్.
   (iv) నీ తరగతిలో గల అందరు బాలుర సముదాయం
   (v) అన్ని సరి పూర్ణ సంఖ్యల సముదాయం
2. A={0, 2, 4, 6}, B = {3, 5, 7}, C = {p, q, r} అయిన క్రింది ఖాళీలలో $\in$ లేదా $\notin$ సరైన గుర్తును పూరించండి.

(i) 0 ….. A	(ii) 3 ….. C	(iii) 4 ….. B
(iv) 8 ….. A	(v) p ….. C	(vi) 7 ….. B

3. క్రింది వాక్యాలను గుర్తులనుపయోగించి వ్యక్తపరచండి.
   (i) 'x' అనే మూలకం 'A'కు చెందదు.
   (ii) 'd' అనేది 'B' సమితి యొక్క ఒక మూలకం.
   (iii) '1' అనేది సహజ సంఖ్యాసమితి 'N' కు చెందుతుంది.
   (iv) '8' అనేది P అనే ప్రధాన సంఖ్యల సమితికి చెందదు.
4. క్రింది వాక్యాలు సత్యమా? అసత్యమా? తెలపండి.
   (i) $5 \notin$ {ప్రధానసంఖ్యలు}
   (ii) $S = \{5, 6, 7\} \Rightarrow 8 \in S$.
   (iii) $-5 \notin W$, 'W' సమితి పూర్ణాంకాల సమితి.
   (iv) $\frac{8}{11} \in Z$, 'Z' అనేది పూర్ణసంఖ్యల సమితి.

5. క్రింది సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.

(i) B = $\{x : x$ అనేది 6 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య$\}$

(ii) C = $\{x : x$ అనేది ఒక రెండంకెల సహజసంఖ్య మరియు రెండంకెల మొత్తం 8$\}$.

(iii) D = $\{x : x$ అనేది 60ని భాగించగల ఒక ప్రధానసంఖ్య$\}$.

(iv) E = $\{$BETTER అనే పదంలోని మొత్తం అక్షరాలు$\}$.

6. క్రింది సమితులను సమితి నిర్మాణ రూపంలో రాయండి.

(i) $\{3, 6, 9, 12\}$ (ii) $\{2, 4, 8, 16, 32\}$

(iii) $\{5, 25, 125, 625\}$ (iv) $(1, 4, 9, 25, \ldots\ldots 100\}$

7. క్రింది సమితుల లోని మూలకాలన్నింటిని రోస్టర్ రూపంలో రాయండి.

(i) A = $\{x : x$ అనేది 50 కంటే ఎక్కువ, 100 కంటే తక్కువ అయిన సహజసంఖ్య$\}$

(ii) B = $\{x : x$ ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $x^2 = 4\}$

(iii) D = $\{x : x$ అనేది "LOYAL" అనే పదంలోని ఒక అక్షరం$\}$

8. రోస్టర్ రూపం నుండి సమితినిర్మాణరూపానికి జతపరచండి.

(i)	$\{1, 2, 3, 6\}$	(a)	$\{x : x$ అనేది ప్రధానసంఖ్య మరియు 6ని భాగిస్తుంది$\}$
(ii)	$\{2, 3\}$	(b)	$\{x : x$ అనేది 10 కంటే తక్కువైన బేసి సహజ సంఖ్య$\}$
(iii)	$\{M, A, T, H, E, I, C, S\}$	(c)	$\{x : x$ అనేది సహజ సంఖ్య మరియు 6ని భాగిస్తుంది$\}$
(iv)	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$	(d)	$\{x : x$ అనేది MATHEMATICS అనే పదంలో ఒక అక్షరం$\}$

2.4 సమితులు - రకాలు

క్రింది సమితులకు సంబందించిన కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

(i) A = $\{x : x$ అనేది 1 కంటే తక్కువైన ఒక సహజసంఖ్య$\}$

(ii) D = $\{x : x$ అనేది 2 చే భాగించబడే బేసి ప్రధానసంఖ్య$\}$

సమితి A, D లలో ఎన్ని మూలకాలున్నాయి? 1 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య. ఏదీ ఉండదని మనకు తెలుసు. కావున సమితి A లో ఎలాంటి మూలకాలుండవు. ఇటువంటి సమితులను శూన్యసమితి అంటాం. A శూన్య సమితి.

అదేవిధంగా 2 చే భాగించగల బేసి ప్రధానసంఖ్యలుండవు. కావున D కూడ శూన్య సమితే

ఒక సమితిలో ఎలాంటి మూలకాలు లేకుంటే అటువంటి సమితులను శూన్య సమితులంటాము. శూన్యసమితిని ϕ లేదా { } తో సూచిస్తాం.

క్రింద మరికొన్ని శూన్య సమితులకు ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినవి.

(i) $A = \{x : 1 < x < 2, x$ ఒక సహజసంఖ్య$\}$

(ii) $B = \{x : x^2 - 2 = 0$ మరియు x ఒక అకరణీయసంఖ్య$\}$

(iii) $D = \{x : x^2 = 4, x$ ఒక బేసి సంఖ్య$\}$

గమనిక : ϕ మరియు $\{0\}$ రెండు కూడా వేర్వేరు సమితులు. సమితి $\{0\}$ లో ఒకే ఒక మూలకం 0 (సున్న) ఉంది. $\{\}$ శూన్యసమితి.

పరిమిత మరియు అపరిమిత సమితులు :

క్రింది సమితులను పరిశీలిద్దాం.

(i) $A = \{$నీ పాఠశాలలోని విద్యార్థులు$\}$ (ii) $L = \{p,q,r,s\}$

(iii) $B = \{x : x$ ఒక సరిసంఖ్య$\}$ (iv) $J = \{x : x,$ 7 యొక్క గుణిజం$\}$

పైన సూచించిన ప్రతి సమితిలోని మూలకాల సంఖ్యల జాబితాను నీవు రాయగలవా? (i) లో మూలకాల సంఖ్య నీ పాఠశాలలోని విద్యార్థులందరూ అవుతారు. (ii)లో సమితి L లో ఉన్న మూలకాల సంఖ్య 4. దీన్ని బట్టి సమితి A మరియు L లోని మూలకాల సంఖ్యను మనం లెక్కించవచ్చు గదా! ఎందుకంటే A , L సమితులలో పరిమిత సంఖ్యలో మూలకాలున్నాయి. ఇలాంటి సమితులను "పరిమిత సమితులు" అంటాం.

ఇపుడు సమితి Bలో పరిశీలించినట్లయితే అన్ని సరిసంఖ్యలు మూలకాలుగా ఉన్నాయి. మనం వీటిని లెక్కించలేము. అంటే సమితి 'B'లోని మూలకాల సంఖ్య పరిమితంగా లేదు. అదేవిధంగా సమితి 'J' లోని మూలకాలను కూడా లెక్కించలేము. దీన్నిబట్టి సమితి B మరియు J లోని మూలకాల సంఖ్య అపరిమితం అని కనుగొన్నాము. ఇలాంటి సమితులను 'అపరిమిత సమితులు' అని అంటారు.

ఇచ్చిన బిందువు నుంచి మనం ఎన్ని సరళరేఖలైనా గీయవచ్చు. అందువలన ఇది అపరిమిత సమితి అవుతుంది. అదేవిధంగా అన్ని పూర్ణసంఖ్యల సమూహాలలో చివర సరిసంఖ్య మరియు బేసిసంఖ్యలను మనం కనుగొనడం సాధ్యంకాదు. అందువలన ఒక సమితి పరిమిత సమితి కాకపోతే అది అపరిమిత సమితి అవుతుందని చెప్పవచ్చు.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

(i) వారంలోని రోజుల సమితిని 'W' అనుకుంటే 'W' పరిమిత సమితి అవుతుంది.

(ii) $x^2 - 16 = 0$ సమీకరణం యొక్క సాధన సమితి 'S' అనుకుంటే 'S' పరిమిత సమితి అవుతుంది.

(iii) ఒక సరళరేఖపై ఉన్న బిందువుల సమితిని 'G' అనుకుంటే 'G' అపరిమిత సమితి అవుతుంది.

ఉదాహరణ-3. క్రింది సమితులలో ఏవి పరిమిత సమితులో, లేక అపరిమిత సమితులో పేర్కొనండి.

(i) $\{x : x \in N$ మరియు $(x-1)(x-2) = 0\}$ (ii) $\{x : x \in N$ మరియు $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in N$ మరియు $2x - 2 = 0\}$ (iv) $\{x : x \in N$ మరియు x ప్రధానసంఖ్య$\}$

(v) $\{x : x \in N$ మరియు x బేసిసంఖ్య$\}$

సాధన :

(i) ఈ సందర్భంలో xకి 1 లేదా 2 విలువలుగా తీసికోవచ్చు. కావున $\{1,2\}$ పరిమితసమితి అవుతుంది. ఇది పరిమిత సమితి.

(ii) $x^2 = 4$ అనగా $x = +2$ లేక -2 కాని $x \in N$ లేదా x ఒక సహజ సంఖ్య కాబట్టి $\{2\}$గా తీసికోవాలి. ఇది కూడా పరిమిత సమితే.

(iii) దత్తసమితి $x = 1$ కాని $1 \in N$ కావున ఇది కూడా పరిమిత సమితి.

(iv) దత్తసమితిలో అన్ని ప్రధానసంఖ్యల సమితిగా ఉన్నాయి. ప్రధానసంఖ్యలు అనంతము కావున ఈ సమితి అపరిమిత సమితి

(v) దత్త సమితిలో అనంతమైన బేసి సంఖ్యలున్నాయి. కావున ఈ సమితి కూడా అపరిమిత సమితియే.

క్రింది పరిమిత సమితులను పరిశీలిద్దాం.

$A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$; $C = \{x : x$ అనేది INDIA అనే పదంలోని అక్షరం$\}$

ఇక్కడ,

సమితి A లోని మూలకాల సంఖ్య = 3.

సమితి B లోని మూలకాల సంఖ్య = 5.

సమితి Cలోని మూలకాల సంఖ్య = 4 (సమితి Cలో 'I' మూలకం రెండుసార్లు వస్తుంది. ఒక సమితిలో ఉన్న మూలకాలు వేర్వేరుగా ఉండాలని మనకు తెలుసుకదా. కావున సమితి C లోని మూలకాల సంఖ్య 4 అవుతుంది).

ఒక సమితిలోని మూలకాల సంఖ్యను తెలిపే దానిని ఆ సమితికి 'కార్డినల్ సంఖ్య' అని అంటాం. సమితి A యొక్క కార్డినల్ సంఖ్యకు $n(A) = 3$ అని సూచిస్తాం.

అదేవిధంగా, $n(B) = 5$, $n(C) = 4$.

గమనిక : శూన్యసమితిలో మూలకాలు ఉండవు. శూన్యసమితి యొక్క కార్డినల్ సంఖ్య '0'(సున్న) అవుతుంది.

$$\therefore n(\phi) = 0$$

ఉదాహరణ-4. $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c\}$ అయిన $n(A)$ మరియు $n(B)$ కనుగొనండి.

సాధన : సమితి A లో 3 వేర్వేరు మూలకాలున్నాయి $\therefore n(A) = 3$

మరియు సమితి B లో 3 వేర్వేరు మూలకాలున్నాయి $\therefore n(B) = 3$

ఇవి చేయండి

1. క్రింది వానిలో శూన్యసమితులు ఏవి? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
   (i) 2 మరియు 3 ల మధ్యనున్న పూర్ణసంఖ్యల సమితి.
   (ii) 1 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్యా సమితి.
   (iii) 2 చే భాగించినపుడు శేషం సున్న వచ్చే బేసిసంఖ్యా సమితి.

2. క్రింది సమితులలో ఏవి పరిమిత సమితులో ఏవి అపరిమిత సమితులో తెలపండి. నీ సమాధానానికి తగిన కారణాలు ఇవ్వండి.

(i) $A = \{x : x \in N$ మరియు $x < 100\}$ (ii) $B = \{x : x \in N$ మరియు $x \leq 5\}$

(iii) $C = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots..\}$ (iv) $D = \{1, 2, 3, 4\}$

(v) $\{x : x$ వారంలో ఒక రోజు$\}$.

3. క్రింది సమితులలో అపరిమిత సమితిని ✓ చేయండి.

(A) 10 కంటే తక్కువైన పూర్ణాంకాల సమితి (B) 10 కంటే తక్కువైన ప్రధానసంఖ్యల సమితి

(C) 10 కంటే తక్కువైన పూర్ణసంఖ్యల సమితి (D) 10 యొక్క కారణాంకాల సమితి

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది సమితులలో ఏవి శూన్యసమితులు ? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

(i) $A = \{x : x^2 = 4$ మరియు $3x = 9\}$.

(ii) ఒక తలంలోని మొత్తం త్రిభుజాలలో మూడు కోణాల మొత్తం 180^0 కంటే తక్కువైన త్రిభుజాల సమితి.

2. $B = \{x : x + 5 = 5\}$ శూన్యసమితి కాదు. ఎందువలన ?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

శూన్య సమితి పరిమిత సమితి అవుతుంది. ఈ వాక్యం సత్యమా? లేదా అసత్యమూ? ఎందుకు ?

అభ్యాసం - 2.2

1. క్రింది సమితులలో ఏవి శూన్యసమితులో, ఏవి కావో తెల్పండి.

(i) ఒక బిందువు గుండా వెళ్ళే సరళరేఖల సమితి

(ii) 2 చే భాగించబడే బేసి సహజ సంఖ్యల సమితి.

(iii) $\{x : x$ ఒక సహజసంఖ్య, $x < 5$ మరియు $x > 7\}$

(iv) $\{x : x$ ఏవేని రెండు సమాంతర రేఖల ఉమ్మడి బిందువు$\}$

(v) సరి ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.

2. క్రింది సమితులలో ఏవి పరిమిత సమితులో ఏవి అపరిమిత సమితిలో తెలపండి.

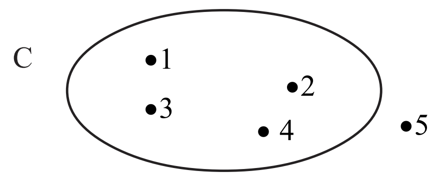
(i) ఒక సంవత్సరంలోని నెలల సమితి (ii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$

(iii) 99 కంటే తక్కువగా గల ప్రధానసంఖ్యల సమితి.

3. క్రింది సమితులలో ప్రతి సమితిని, పరిమిత సమితో లేదో అపరిమిత సమితో తెల్పండి.
   (i) ఆంగ్ల భాషలోని అక్షరాల సమితి
   (ii) X- అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే రేఖల సమితి
   (iii) 5 యొక్క గుణిజాల సమితి.
   (iv) (0, 0) మూలబిందువు గుండా వేళ్ళే వృత్తాల సమితి.

2.5 సమితులను సూచించడానికి ఉపయోగించే చిత్రాలు

S అనేది ఒక సమితి 'x' ఒక వస్తువు అయితే $x \in S$ లేక $x \notin S$ కావాలి. ప్రతి సమితిని ఒక సంవృత వక్రం C గీసి సూచించవచ్చు. C లోని మూలకాలను వక్రం లోపల బిందువులుగా చూపిస్తూ C కి చెందని మూలకాలను వక్రం బయట సూచించాలి. ఉదాహరణకి ప్రక్క పటంలో సమితి C = {1, 2, 3, 4}.



2.6 విశ్వసమితి మరియు ఉపసమితి

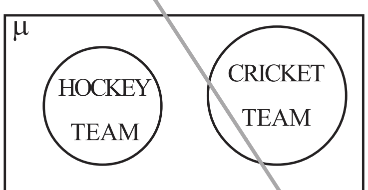
నీ పాఠశాల నుండి ఒక క్రికెట్ జట్టును ఎంపిక చేయాలనుకోండి. జట్టు ఎంపిక చేయాలంటే ఎలాంటి సమితిని తీసికోవాలి ? నీ పాఠశాలలోని అందరు విద్యార్థుల సమితిని తీసికోవాలి. హాకీజట్టును ఎంపిక చేయాలనుకోండి. మరలా నీ పాఠశాల లోని విద్యార్థులందరిలోనే హాకీజట్టు ఏర్పాటు చేసుకోవాలి. కాబట్టి నీ పాఠశాల నుంచి ఏ జట్టును ఎంపిక చేయాలన్న పాఠశాలలోని విద్యార్థులందరి సమితిలో నుండే ఎంపిక చేసుకోవాలి. అందువలన నీ పాఠశాలలోని విద్యార్థులందరినీ విశ్వసమితిగా అనుకోవచ్చు.

విశ్వసమితికి మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

(i) మన రాష్ట్రంలో వివిధ రకాలైన, ప్రజాసమూహాలను అధ్యయనం చేయాలంటే, ఆంధ్రప్రదేశ్ లోని ప్రజలందరూ విశ్వసమితి లోకి వస్తారు.

(ii) మన దేశంలో వివిధ రకాలైన ప్రజా సమూహాలను అధ్యయనం చేయాలంటే భారతదేశంలో నివసించే ప్రజలందరూ విశ్వసమితి అవుతారు.

విశ్వసమితిని '$\bigcup$' లేదా 'μ' తో సూచిస్తాం. విశ్వసమితిని సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రంలో μ చే సూచిస్తాము.



ఒకవేళ వాస్తవ సంఖ్యా సమితి R ని విశ్వసమితిగా తీసుకుంటే మరి కరణీయ మరియు అకరణీయ సంఖ్యా సమితుల గూర్చి ఏమి చెప్పవచ్చు ?

అకరణీయ సంఖ్యా సమితి

$$Q = \{x : x = \frac{p}{q}, \text{p, q} \in z \text{ మరియు } q \neq 0\}$$

పై అకరణీయ సంఖ్య సమితిని ఈ క్రింది విధంగా చదువుతాము. ‘Q’ అనేది అన్ని సంఖ్యలు $x, x = \frac{p}{q}$ మరియు p, qలు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

లేక Q అనేది $x = \frac{p}{q}$ p, q $\in$ z and $q \neq 0\}$

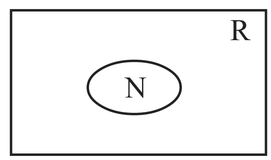
అంటే Q లోని ప్రతి మూలకం Rలో కూడా మూలకం అవుతుంది. అందువలన Qని Rకి ఉపసమితి అంటాం. Q, Rకి ఉపసమితి అయితే దానిని $Q \subset R$ అని రాస్తాం.

గమనిక : మన సౌకర్యార్థం ‘$\Rightarrow$’ గుర్తును (Implies) తరచుగా వాడచ్చు. ఈ గుర్తును ఉపయోగించి, ఉపసమితి యొక్క నిర్వచనాన్ని క్రింది విధంగా రాయచ్చు.

$a \in A$ అయితే $A \subset B \Rightarrow a \in B$, A, B లు రెండు సమితులు

a, A కి ఒకే మూలకమైతే A, Bకి ఉపసమితి అవుతుంది $\Rightarrow$ 'a' అనేది B కి కూడా మూలకం అవుతుంది.

వాస్తవ సంఖ్యాసమితి Rకి చాలా ఉపసమితులు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకి,



సహజ సంఖ్యా సమితి $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

పూర్ణాంకాల సమితి $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

పూర్ణ సంఖ్యల సమితి $Z = \{\ldots., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots..\}$

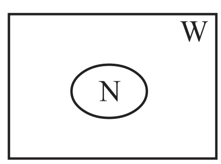
అకరణీయ సంఖ్యలు కాని వాస్తవ సంఖ్యలన్ని కరణీయ సంఖ్యసమితి Q^1 అవుతాయి.

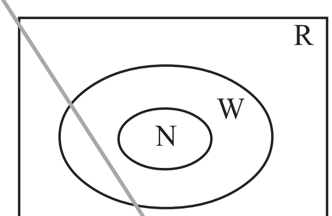
అందువలన $Q^1 = \{x : x \in R$ మరియు $x \notin Q\}$. అంటే అకరణీయ సంఖ్యలు కాని అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు. ఉదా: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ మరియు π.

అదేవిధంగా సహజ సంఖ్య సమితి, N అనేది పూర్ణాంకాల సమితి W కి ఉపసమితి అవుతుంది. దీన్ని $N \subset W$ అని రాస్తాం. మరియు W, Rకి ఉపసమితి.

i.e., $N \subset W$ మరియు $W \subset R$

$\Rightarrow N \subset W \subset R$





కొన్ని ఉపసమితులకు సంబంధించిన ముఖ్యమైన సంబంధాలు చూస్తే

$N \subset Z \subset Q, Q \subset R, Q^1 \subset R$, మరియు $N \not\subset Q^1$.

ఉదాహరణ-5. ఆంగ్ల భాషలో అచ్చుల సమితి తీసుకున్నట్లయితే $V = \{a, e, i, o, u\}$.

ఆంగ్ల భాషలోని అక్షరాలన్నీ ఒక సమితిగా తీసుకున్నట్లయితే $A = \{a, b, c, d, \ldots.., z\}$. ఈ ఉదాహరణలో విశ్వసమితి మరియు ఉపసమితిని గుర్తించండి.

సాధన : సమితి V లో ఉన్న ప్రతిమూలకం Aకి కూడా మూలకంగా ఉంది. కాని సమితి Aలో ఉన్న ప్రతిమూలకం సమితి Vలో లేదు. అందువలన సమితి V, సమితి A కు ఉపసమితి మరియు $V \subset A$, అనగా $a \in V$ అయినపుడు $a \in A$ అవుతుంది.

<u>గమనిక</u> **:** శూన్యసమితి ϕ లో మూలకాలు ఏవీ ఉండవు కాబట్టి, ϕ ప్రతి సమితికి ఉపసమితి అవుతుంది.

సమితి A, B సమితికి ఉపసమితి కాదు అంటే $(A \not\subset B)$ సమితి A లోని కనీసం ఒక మూలకమైనా సమితి Bలో ఉండదు.

ఉపసమితులకు మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

- సమితి $C = \{1, 3, 5\}$, సమితి Dకి ఉపసమితి, $D = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ అనగా సమితి C కి చెందిన ప్రతి మూలకం 1, 3, 5 సమితి D కు కూడా చెందుతుంది.
- $A = \{a, e, i, o, u\}$ మరియు $B = \{a, b, c, d\}$ అయిన సమితి A, B సమితికి ఉపసమితి కాదు. ఇంకా సమితి B కూడా A సమితికి ఉపసమితి కాదు.

2.6.1 సమసమితులు

క్రింది సమితులను గమనిద్దాం.

A = {సచిన్, ద్రావిడ్, కోహ్లి}

B = {ద్రావిడ్, సచిన్, ధోని}

C = {కొహ్లి, ద్రావిడ్, సచిన్}

సమితులు, A, B, C లలో మీరు ఏమి పరిశీలించారు ? సమితి Aలో ఉన్న ఆటగాళ్ళందరూ సమితి C లో ఉన్నారు. కాని సమితి Bలో కాదు, అంటే సమితి A మరియు Cలలో ఒకే రకమైన మూలకాలున్నాయి కాని సమితులు A, Bలలో మూలకాలు వేర్వేరుగా ఉన్నాయి. కాబట్టి సమితులు A మరియు C లు సమసమితులు. కాని సమితులు A, B లు సమానం కావు.

రెండు సమితులు A మరియు Cలు సమానం కావాలంటే A లోని ప్రతి మూలకం Cలో ఉండాలి. అలాగే Cలోని ప్రతి మూలకం Aకి చెందాలి.

A మరియు C లు సమసమితులైతే $A = C$ అని రాస్తాం.

ఉదాహరణ-6. క్రింది సమితులను తీసికుందాం.

$$A = \{p, q, r\} \qquad B = \{q, p, r\}$$

పై సమితులలో A లోని ప్రతి మూలకం Bలో కూడా ఉంది. $\therefore A \subset B$.

అదేవిధంగా సమితి Bలోని ప్రతి మూలకం Aలో కూడా ఉంది. $\therefore B \subset A$.

దీన్నిబట్టి మనం $B \subset A$ మరియు $A \subset B \Leftrightarrow A = B$ అని కూడా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $\Leftrightarrow$ గుర్తు రెండు వైపులా వర్తిస్తుంది మరియు దీనిని **if and only if** ("iff") అని చదువుతాం.

ఉదాహరణ-7. $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ మరియు 'N' సహజసంఖ్యా సమితి. అయిన A మరియు N లు సమానమవుతాయేమో సరిచూడండి?

సాధన : రెండు సమితులలో మూలకాలు ఒకటి. కావున A మరియు N సమితులు రెండు కూడా సహజసంఖ్యా సమితులే. అందువలన సమితి A మరియు సమితి N లు సమానం. $A = N$.

ఉదాహరణ-8. సమితులు $A = \{p, q, r, s\}$ మరియు $B = \{1, 2, 3, 4\}$లు సమానమా?

సాధన : సమితి A మరియు సమితి Bలలో ఒకే మూలకాలు లేవు. కాబట్టి $A \neq B$.

ఉదాహరణ-9. 6 కంటే తక్కువైన ప్రధానాంకాల సమితిని A అనుకోండి. మరియు 30కి ప్రధాన కారణాంకాలు గల సమితిని P అనుకోండి. A మరియు P సమానమా ? సరిచూడండి.

సాధన: 6 కంటే తక్కువైన, ప్రధానాంకాల సమితి $A = \{2,3,5\}$

30కి ప్రధాన కారణాంకాలు 2, 3 మరియు 5. కావున $P = \{2,3,5\}$

సమితి A మరియు P లలో ఒకే రకమైన మూలకాలున్నాయి కాబట్టి A మరియు P సమానం.

ఉదాహరణ-10. $A = \{x : x$ అనేది 'ASSASSINATION' అనే పదంలోని అక్షరం$\}$

$B = \{x : x$ అనేది STATION అనే పదంలోని అక్షరం$\}$

అయిన A మరియు B సమితులు సమానం అని చూపండి.

సాధన : $A = \{x : x$ అనేది 'ASSASSINATION' అనే పదంలోని అక్షరం$\}$ అని ఇవ్వబడినది.

సమితి Aని ఈ విధంగా కూడా రాయచ్చు. $A = \{A,S,I,N,T,O\}$. ఎందుకంటే సమితిలోని మూలకాలు మరలా మరలా రాయకూడదు.

$B = \{x : x$ అనేది STATION అనే పదంలోని అక్షరం$\}$ అని ఇవ్వబడింది.

$B = \{A,S,I,N,T,O\}$ అని కూడా రాయచ్చు.

కావున A మరియు B లోని మూలకాలు సమానం $A = B$

అభ్యాసం - 2.3

1. క్రింది వాటిలో సమసమితులు ఏవి?

   (i) $A = \{x : x$ అనేది 'FOLLOW' అనే పదంలో ఒక అక్షరం$\}$

   (ii) $B = \{x : x$ అనేది 'FLOW' అనే పదంలో ఒక అక్షరం$\}$

   (iii) $C = \{x : x$ అనేది 'WOLF' అనే పదంలోని ఒక అక్షరం$\}$

2. క్రింది సమితులను పరిశీలించి, క్రింద ఇచ్చిన వాక్యాలు సరియగునట్లు = లేదా $\neq$ తో ఖాళీలను పూరించండి.

   $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{$మొదటి మూడు సహజసంఖ్యలు$\}$

   $C = \{a, b, c, d\}$; $D = \{d, c, a, b\}$

   $E = \{a, e, i, o, u\}$; $F = \{$ఆంగ్లభాషలోని అచ్చులసమితి$\}$

(i) A ...... B (ii) A......E (iii) C ...... D

(iv) D ...... F (v) F...... A (vi) D ...... E

(vii) F ...... B

3. క్రింద ఇచ్చిన ప్రతి సమితిలో $A = B$ అవుతుందో లేదో తెలపండి.

(i) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, c, a, b\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$ $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{x : x$ ఒక ధన సరిపూర్ణ సంఖ్య మరియు $x \leq 10\}$

(iv) $A = \{x : x,$ 10 యొక్క గుణిజం$\}$ $B = \{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\ldots\}$

$E = \{2, 4, 6\}$ మరియు $F = \{6, 2, 4\}$ అనే సమితులను తీసుకున్నట్లయితే $E = F$ అని గమనించవచ్చు. ఎందుకంటే E లోని ప్రతి మూలకం Fకు చెందుతుంది కాబట్టి 'E', 'F'కి ఉపసమితి అవుతుంది. అలాగే F లోని ప్రతి మూలకం E కు చెందుతుంది. కావున F, Eకి ఉపసమితి అవుతుంది. ఈ విధంగా ప్రతి సమితి దానికదే ఉపసమితి అవుతుందని మనం చూపవచ్చు.

A మరియు B లలో ఒకే మూలకాలున్నట్లయితే, అవి సమానం. అనగా $A = B$. ఈ పరిశీలన వల్ల మనం ప్రతి సమితి దాని కదే ఉపసమితి అవుతుందని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ-11. $\phi, A = \{1, 3\}, B = \{1, 5, 9\}, C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ సమితులను తీసికొందాం. క్రింది ప్రతి సమితుల జతలలో $\subset$ లేదా $\not\subset$ గుర్తును ఉంచండి.

(i) ϕ ….. B (ii) A ….. B (iii) A ….. C (iv) B ….. C

సాధన : (i) $\phi \subset B$ ఎందుకంటే శూన్య సమితి ప్రతిసమితికి ఉపసమితి అవుతుంది.

(ii) $A \not\subset B$, ఎందుకంటే $3 \in A$ కాని $3 \notin B$.

(iii) $A \subset C$, ఎందుకంటే $1, 3 \in A$ మరియు C.

(iv) $B \subset C$, ఎందుకనగా B లో ఉన్న ప్రతి మూలకం Cలో కూడా ఉన్నది.

ఇవి చేయండి

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $F = \{\ \}$.

అయిన క్రింది ఖాళీలను $\subset$ లేదా $\not\subset$ లతో పూరించండి.

(i) A ….. B (ii) C ….. A (iii) B ….. A

(iv) A ….. C (v) B ….. C (vi) ϕ ….. B

2. క్రింది వాక్యాలలో 'సత్యమైన' వాటిని పేర్కొనండి.

(i) $\{\ \} = \phi$ (ii) $\phi = 0$ (iii) $0 = \{0\}$

ప్రయత్నించండి

1. $A = \{$చతుర్భుజాలు$\}$, $B = \{$చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, ట్రెపీజియం, రాంబస్$\}$. $A \subset B$ లేక $B \subset A$ అవుతుందేమో పేర్కొనండి. నీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
2. $A = \{a, b, c, d\}$ అయిన A కి ఎన్ని ఉపసమితులున్నాయి? (శూన్యసమితి మరియు సమసమితులను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి.)
   (A) 5 (B) 6 (C) 16 (D) 65
3. P అనేది 5 యొక్క కారణాంకాల సమితి. Q అనేది 25 యొక్క కారణాంకాల సమితి. R అనేది 125 యొక్క కారణాంకాల సమితి క్రింది వానిలో ఏది అసత్యం.
   (A) $P \subset Q$ (B) $Q \subset R$ (C) $R \subset P$ (D) $P \subset R$
4. A అనేది 10 కంటే తక్కువైన, ప్రధానాంకాల సమితి B అనేది 10 కంటే తక్కువైన బేసి సంఖ్యల సమితి. C అనేది 10 కంటే తక్కువైన సరిసంఖ్యల సమితి. క్రింది వానిలో 'సత్యమైన' వాక్యాలేవి?
   (i) $A \subset B$ (ii) $B \subset A$ (iii) $A \subset C$
   (iv) $C \subset A$ (v) $B \subset C$ (vi) $X \subset A$

క్రింది సమితులను తీసికొందాం.

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

A లో ఉన్న మూలకాన్ని B లో ఉన్నాయి $\therefore A \subset B$.

B లో ఉన్న మూలకాలన్ని C లో ఉన్నాయి $\therefore B \subset C$.

Aలో ఉన్న మూలకాలన్నీ Cలో ఉన్నాయి $\therefore A \subset C$.

కాబట్టి, $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

అభ్యాసం - 2.4

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ అయిన క్రింది వాక్యాలలో 'సత్యమైన' వాటిని తెలుపండి.
   (i) $2 \in A$ (ii) $2 \in \{1, 2, 3, 4\}$
   (iii) $A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ (iv) $\{2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
2. క్రింది వాక్యాలకు తగు కారణాలు పేర్కొనండి.
   (i) $\{1, 2, 3, \ldots, 10\} \neq \{x : x \in N$ మరియు $1 < x < 10\}$
   (ii) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \neq \{x : x = 2n+1$ మరియు $x \in N\}$

(iii) $\{5, 15, 30, 45\} \neq \{x : x, 15$ యొక్క గుణిజం$\}$

(iv) $\{2, 3, 5, 7, 9\} \neq \{x : x$ ఒక ప్రధాన సంఖ్య$\}$

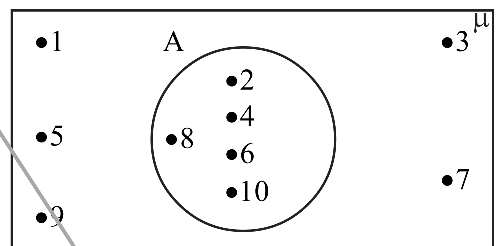
3. క్రింది సమితులకు గల ఉపసమితులన్నింటి జాబితాను రాయండి.
 (i) B = {p, q} (ii) C = { x, y, z} (iii) D = {a, b, c, d}
 (iv) E = [1, 4, 9, 16] (v) F = {10, 100, 1000}

2.7 వెన్ చిత్రాలు

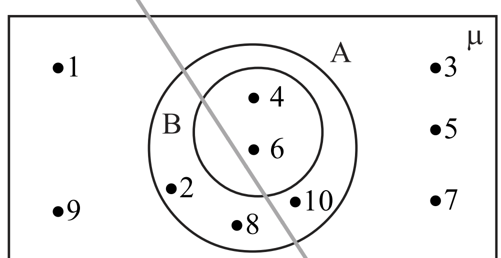
ఇప్పటికే మనం సమితులను సూచించే కొన్ని విధములైన చిత్రాలను చూశాం. ఇపుడు ఇంకా వివరంగా వాటి గురించి అధ్యయనం చేద్దాం. సమితుల మధ్య సంబంధాలను సూచించటానికి ఆయిలర్ లేదా వెన్ చిత్రాలను మనం ఉపయోగిస్తాం. ఈ చిత్రాలలో దీర్ఘచతురస్రాలు మరియు సంవృత వక్రాలు సాధారణంగా వృత్తాలు ఉంటాయి.

ఈ అధ్యాయంలో ఇంతకు ముందే సూచించిన విధంగా, విశ్వసమితి సాధారణంగా దీర్ఘ చతురస్రంలో సూచిస్తాం.

(i) $\mu=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ విశ్వసమితి అని అంతకంటే $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ సమితి విశ్వసమితికి ఉపసమితులు అవుతుంది. దీన్ని వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంగా చూపవచ్చు.

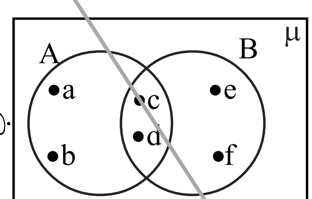


(ii) $\mu = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ విశ్వసమితి, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ మరియు $B = \{4, 6\}$ లు ఉపసమితులు మరియు $B \subset A$. అయిన మనం క్రింది వెన్ చిత్రం ద్వారా పై వవాటిని సూచించవచ్చు.



(iii) A = {a, b, c, d} మరియు B = {c, d, e, f}.

మనం ఈ సమితులని వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంగా సూచించవచ్చు.



2.8 సమితులలో ప్రాథమిక పరిక్రియలు

అంకగణితంలో కూడిక, తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగహారం లాంటి పరిక్రియలు ఉంటాయని మనకు తెలుసుగదా! అదేవిధంగా సమితులలో గూడా మనం సమ్మేళనాన్ని, ఛేదనాన్ని మరియు భేదాల పరిక్రియలను నిర్వచిద్దాం.

2.8.1 సమితుల సమ్మేళనం

ఉదాహరణ-12. నీ తరగతి విద్యార్థులలో మంగళవారం పాఠశాలకు హాజరుకాని వారిని సమితి A అని, బుధవారం హాజరుకాని విద్యార్థుల సమితి B అనుకొందాం.

అపుడు A = {రోజా, రాము. రవి} మరియు

B = {రాము, ప్రీతి, హనీఫ్}

ఇపుడు మనం మంగళవారం లేక బుధవారం పాఠశాలకు హాజరుకాని విద్యార్థుల సమితి K, అనుకుంటే అపుడు రోజా $\in$ K అవుతుందా? రాము $\in$ K అవుతుందా? రవి $\in$ K అవుతుందా? హనీఫ్ $\in$ K అవుతుందా? ప్రీతి $\in$ K అవుతుందా? అఖిల $\in$ K అవుతుందా?

రోజా, రాము, రవి, హనీఫ్ మరియు ప్రీతి అందరూ K సమితికి చెందుతారు. కాని అఖిల K సమితికి చెందదు.

అందువలన, K = {రోజా, రాము, రహీం, పృధ్వి}

ఇక్కడ మనం Kని A, B సమితుల సమ్మేళనం అంటారు. A, B సమితుల సమ్మేళనమనగా A మరియు B సమితులలోని ఉమ్మడి మూలకాలను ఒకే సారి తీసికొని రెండింటిలోని మూలకాలన్నింటిని కలిగి వున్న సమితి అని అర్థం, సమితుల సమ్మేళనంను 'μ' గుర్తులో సూచిస్తాం.

సంకేతంగా $A \cup B$ అని రాస్తూ A యూనియన్ B అని చదువుతాం.

$A \cup B = \{x : x \in A$ లేదా $x \in B\}$

ఉదాహరణ-13. $A = \{2, 5, 6, 8\}$ మరియు $B = \{5, 7, 9, 1\}$ అయిన $A \cup B$ కనుగొనుము.

సాధన : $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$A \cup B$ రాసేటపుడు A .B సమితులలోని ఉమ్మడి మూలకమైన 5ని ఒకేసారి తీసికొన్నామని గమనించవచ్చు.

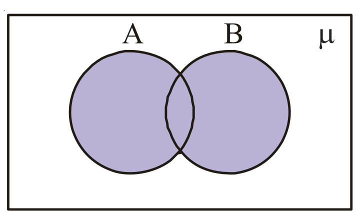
ఉదాహరణ-14. $A = \{a, e, i, o, u\}$ మరియు $B = \{a, i, u\}$ అయిన $A \cup B = A$ అని చూపండి.

సాధన : $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} = A$ అవుతుంది.

ఈ ఉదాహరణ ద్వారా సమితి A మరియు దాని ఉపసమితి B ల సమ్మేళనం సమితి A అవుతుందని తెలుస్తుంది.

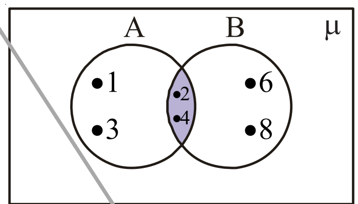
అంటే $B \subset A$ అయితే $A \cup B = A$.

సమితుల సమ్మేళనం వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంగా గుర్తించబడింది. (షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం)



ఉదాహరణ-15. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $B = \{2, 4, 6, 8\}$ అయిన $A \cup B$ ని వెన్ చిత్రాలలో వివరించండి.

సాధన :



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

2.8.2 సమితుల ఛేదనం

మరొకసారి తరగతికి హాజరుకాని విద్యార్థుల ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం. ఈ సారి మనం మంగళవారం మరియు బుధవారం కూడా హాజరు కాని విద్యార్థుల సమితిని L అనుకుందాం.

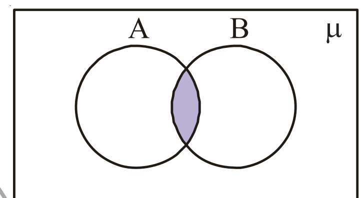
L = {రాము} అని కనుగొన్నాం.

ఇక్కడ, 'L' ని A, B సమితుల ఛేదనం అని అంటాం.

సాధారణంగా, సమితి A మరియు సమితి B లలో ఉన్న ఉమ్మడి మూలకాలను A, B సమితుల ఛేదనం అంటాం. అనగా సమితి A మరియు సమితి Bకి రెండింటికి చెందిన మూలకాలు. సమితుల ఛేదనాన్ని మనం $A \cap B$. (A ఇంటర్‌సెక్షన్ B అని చదువుతాం) అని సూచిస్తాం.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ మరియు } x \in B\}$$

ప్రక్కపటంలో, A, B సమితుల ఛేదనాన్ని వెన్ చిత్రాలలోని షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతంలో మనం చూపవచ్చు.



$A \cap B$

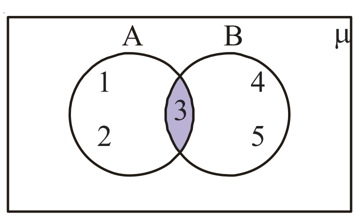
ఉదాహరణ-16. $A = \{5, 6, 7, 8\}$ మరియు $B = \{7, 8, 9, 10\}$ అయిన $A \cap B$ కనుగొనుము.

సాధన : సమితుల A, B లలోకి ఉమ్మడి మూలకాలు 7, 8.

$\therefore A \cap B = \{7, 8\}$.

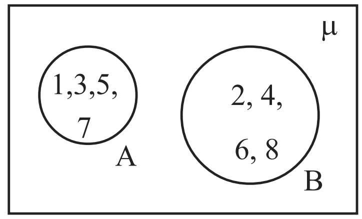
ఉదాహరణ-17. $A = \{1, 2, 3\}$ మరియు $B = \{3, 4, 5\}$ అయిన $A \cap B$ని వెన్ చిత్రాలలో వివరించండి.

సాధన : A, B సమితుల ఛేదనాన్ని వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంలో చూపవచ్చు.



$A \cap B = \{3\}$

2.8.3 వియుక్త సమితులు



$A \cap B = \phi$

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ మరియు $B = \{2, 4, 6, 8\}$ అనుకోండి. సమితి A మరియు సమితి Bలలో ఉమ్మడి మూలకాలు లేవని మనం చూడవచ్చు. అలాంటి సమితులను వియుక్త సమితులు అని అంటాం. వియుక్త సమితులను వెన్ చిత్రాలలో క్రింది విధంగా చూపవచ్చు.

ఇవి చేయండి

1. $A = \{1, 3, 7, 8\}$ మరియు $B = \{2, 4, 7, 9\}$ అయిన $A \cap B$ కనుక్కోండి.
2. $A = \{6, 9, 11\}; B = \{\ \}$ అయిన $A \cup \phi$ కనుక్కోండి.
3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; B = \{2, 3, 5, 7\}$. $A \cap B$ని కనుగొని $A \cap B = B$ అని చూపండి.
4. $A = \{4, 5, 6\}; B = \{7, 8\}$ అయిన $A \cup B = B \cup A$ అని చూపండి.

ప్రయత్నించండి.

1. A మరియు B వియుక్త సమితులు అయ్యేటట్లుగా కొన్ని సమితులు A మరియు Bలు, వాని మూలకాలు ఎన్నుకొని జాబితా తయారుచేయండి.
2. $A = \{2, 3, 5\}$, అయిన $A \cup \phi$ మరియు $\phi \cup A$ కనుగొని పోల్చండి.
3. $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ అయిన $A \cup B$, $A \cap B$ కనుగొనండి. ఫలితం నుండి మీరు ఏమి గమనించారు ?
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. గా ఇవ్వబడినవి. A, Bల ఛేదనాన్ని కనుగొనండి.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఏవైనా రెండు వియుక్త సమితుల ఛేదనం శూన్యసమితి అవుతుంది. ఈ వాక్యం సత్యమా ? అసత్యమా?

2.8.4 సమితుల భేదం

మూలకాలు సమితి A కు మాత్రం చెంది, B సమితికి చెందకుండా ఉండే మూలకాలని A, B సమితుల భేదం అని అంటారు.

$$A - B = \{x : x \in A \text{ మరియు } x \notin B\}.$$

ఉదాహరణ-18. A = {1, 2, 3, 4, 5}; B = {4, 5, 6, 7} అనుకొనుము. A – Bని కనుగొనుము.

సాధన : A = {1, 2, 3, 4, 5} మరియు B = {4, 5, 6, 7} అని ఇవ్వబడినవి. 'A' సమితికి మాత్రమే చెంది, సమితి 'B' కి చెందని మూలకాలను మాత్రం తీసికొనాలి.

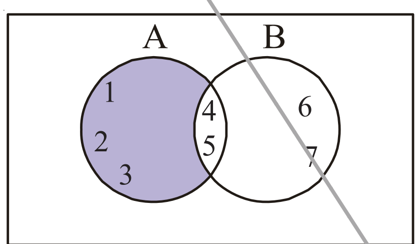
$\therefore$ A – B = {1, 2, 3}. $\because$ 4, 5 మూలకాలు B లో ఉన్నాయి. కాబట్టి తీసికోలేదు.

అదేవిధంగా B – A అంటే, B సమితిలో ఉన్న మూలకాలను మాత్రమే తీసికోవాలి.

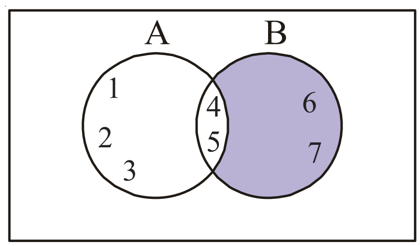
$\therefore$ B – A = {6, 7} (4, 5 మూలకాలు A లో ఉన్నాయి).

A – B $\neq$ B – A అని గమనించండి.

A-B ల వెన్ చిత్రం క్రింద చూపబడింది.

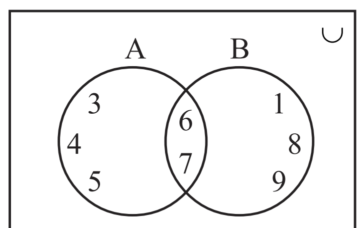


A – B = {1, 2, 3}



B – A = {6, 7}

ఉదాహరణ-19. క్రింది సమితులను పరిశీలించండి.



A = {3, 4, 5, 6, 7} $\therefore$ n(A) = 5

B = {1, 6, 7, 8, 9} $\therefore$ n(B) = 5

A $\cup$ B = {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} $\therefore$ n(A $\cup$ B) = 8

A $\cap$ B = {6, 7} $\therefore$ n(A $\cap$ B) = 2

$\therefore$ n(A $\cup$ B) = 5 + 5 – 2 = 8

n(A $\cup$ B) = n(A) + n(B) – n(A $\cap$ B) అని మనం పరిశీలించవచ్చు.

ఇవి చేయండి.

1. A = {1, 2, 3, 4 ,5}; B = {4, 5, 6, 7}అయిన A – B మరియు B – A కనుగొనండి. A – B, B – A లు రెండు సమానమా?
2. V = {a, e, i, o, u} మరియు B = {a, i,k, u} అయిన V – B మరియు B – V.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

సమితులు A – B, B – A మరియు A $\cap$ B పరస్పరం వియుక్త సమితులు అవుతాయి. కొన్ని ఉదాహరణల సహాయంతో ఈ సత్యాన్ని పరిశీలించండి

అభ్యాసం - 2.5

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ అయిన $A \cap B$ మరియు $B \cap A$ కనుగొనండి. రెండు సమానమా?

2. $A = \{0, 2, 4\}$, $A \cap \phi$ మరియు $A \cap A$ కనుగొనుము. వ్యాఖ్యానించండి.

3. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ మరియు $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ అయిన $A - B$ మరియు $B - A$లను కనుగొనుము.

4. A మరియు B లు రెండు సమితులు, $A \subset B$ అయిన $A \cup B$ ఎంత?

5. $A = \{x : x$ ఒక సరి సహజసంఖ్య$\}$

   $B = \{x : x$ ఒక బేసి సహజ సంఖ్య$\}$

   $C = \{x : x$ ఒక బేసి సహజ సంఖ్య$\}$

   $D = \{x : x$ ఒక ప్రధానసంఖ్య$\}$ అయిన క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

   $A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D.$

6. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$; $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

   $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$; $D = \{5, 10, 15, 20\}$ అయిన క్రింది వానిని కనుగొనుము.

   (i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$ (v) $C - A$

   (vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$ (ix) $C - B$ (x) $D - B$

7. క్రింద ఇవ్వబడిన వాక్యాలు సత్యమా లేక అసత్యమా? తెలుపండి. మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.

   (i) $\{2, 3, 4, 5\}$ మరియు $\{3, 6\}$ లు వియుక్త సమితులు

   (ii) $\{a, e, i, o, u\}$ మరియు $\{a, b, c, d\}$ వియుక్త సమితులు

   (iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ మరియు $\{3, 7, 11, 15\}$ లు వియుక్త సమితులు

   (iv) $\{2, 6, 10\}$ మరియు $\{3, 7, 11\}$ లు వియుక్త సమితి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్ని సమితి అంటారు. సునిర్వచిత మనగా

   (i) సమితిలో ఉన్న వస్తువులన్నీ ఒకే లక్షణం లేదా ధర్మాన్నే కల్గి వుంటాయి. మరియు

   (ii) ఏదైనా ఒక వస్తువు సమితికి చెందుతుందో లేదా అని నిర్ధారించవచ్చు.

2. సమితిలోని వస్తువులను మూలకాలు అని అంటాం. 'చెందుతుంది' అని సూచించటానికి $\in$ అనే గుర్తుని ఉపయోగిస్తాం.

3. సమితులను రోస్టర్ రూపంలో రాయవచ్చు. సమితిలోని మూలకాలన్నింటిని రాసి కామా (commas)లతో వేరుచేసి, { } (ఫ్లవర్) బ్రాకెట్లలో ఉంచాలి.
4. సమితులను సమితి నిర్మాణరూపంలో కూడా రాయచ్చు.
5. ఒక సమితిలో మూలకాలు లేకుండా ఉంటే ఆ సమితిని శూన్య సమితి అంటాం.
6. ఒక సమితిలోని మూలకాలను లెక్కించగలిగితే ఆ సమితిని పరిమిత సమితి అంటాం.
7. పరిమిత సమితి కానటువంటి సమితులను అపరిమిత సమితులు అని అంటారు.
8. ఒక సమితిలో గల మూలకాల సంఖ్యను ఆ సమితి యొక్క 'కార్డినల్' సంఖ్య అని అంటాం.
9. విశ్వసమితిని 'μ'తో సూచిస్తాం. విశ్వసమితిని సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రాలలో సూచిస్తాము.
10. సమితి A, Bసమితికి ఉపసమితి ఎపుడవుతుందంటే 'a', సమితి A లో మూలకం అయివుండి, సమితి Bలో గూడా మూలకం అయితే సమితి A, B సమితికి ఉపసమితి అవుతుంది. దీన్ని ఈ క్రింది విధంగా రాస్తాం. $a \in A \Rightarrow a \in B$ అయితే $A \subset B$ (A, B లు రెండు సమితులు)
11. రెండు సమితులు A మరియు B సమానం కావాలంటే A లోని ప్రతి మూలకం Bలో ఉండాలి మరియు Bలోనే ప్రతి మూలకం కూడా Aలో ఉండాలి.
12. A, B సమితుల సమ్మేళనాన్ని $A \cup B$ అని రాయవచ్చు. $A \cup B = \{x : x \in A$ లేక $x \in B\}$.
13. A, B సమితుల ఛేదనాన్ని $A \cap B$ అని రాయచ్చు $A \cap B = \{x : x \in A$ మరియు $x \in B\}$
14. A, B సమితుల భేదాన్ని $A - B$ లేదా $B - A$ లచే సూచిస్తాము.
15. సమితుల ప్రాథమిక ప్రక్రియలు సూచించటాన్ని వెన్ చిత్రాలు సౌకర్యవంతంగా ఉంటాయి.