అధ్యాయము

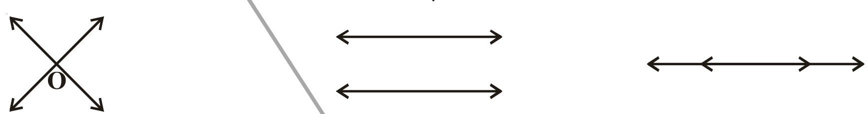
9

వృత్తాలకు స్పర్శరేఖలు మరియు ఛేదనరేఖలు

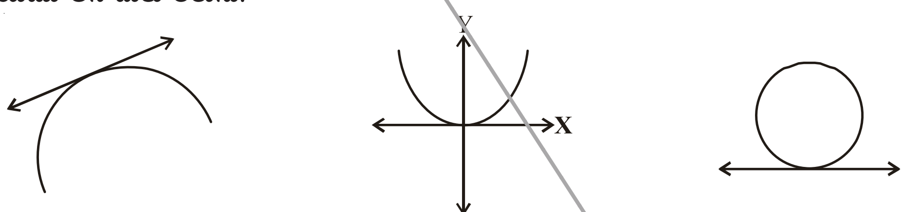
(Tangents and Secants to a Circle)

9.1 పరిచయం

ఒక సమతలంలో రెండు రేఖలు గరిష్ఠంగా ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి లేదా అసలు ఖండించుకోవు అని మనం చూసాము. కొన్ని సందర్భాలలో రేఖలు ఒకదానితో మరొకటి ఏకీభవిస్తాయి.



ఇదే విధంగా తలములో ఒక సరళరేఖనూ, ఒక వక్రరేఖనూ గీస్తే ఏమౌతుంది? మీరు బహుపదుల అధ్యాయంలో నేర్చుకున్నట్లుగా ఈ వక్రరేఖ బహుపది వక్రం "పరావలయము"గా కూడా వుండవచ్చును లేదా సరళ సంవృత వక్రమైన 'వృత్తము' కావచ్చును. వృత్తము అనేది ఒక స్థిర బిందువు నుండి స్థిర దూరంలో వున్న బిందువుల సముదాయము అని మీకు తెలుసు.



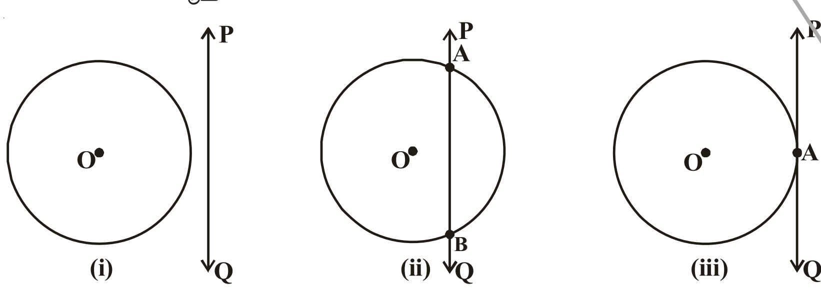
వృత్తాకార వస్తువులు లేదా పరికరాలు తలముపై కదులుతున్నప్పుడు ఏర్పడు మార్గము మీరు చూసే వుంటారు. ఉదాహరణకు సైకిలు తొక్కునపుడు, రైలు బండి పట్టాలపై నడుచునపుడు వంటివి. ఈ సందర్భంలో వృత్తము మరియు ఒక రేఖతో సంబంధం మనకు గోచరిస్తుంది. మరి ఈ సంబంధాన్ని మీరు ఏవిధంగా వ్యక్తపరచగలరు?

ఒక తలముపై వృత్తము మరియు ఒక రేఖను తీసుకుంటే ఏర్పడే సంబంధాలను మనం ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాము.

9.1.1 ఒక రేఖ మరియు ఒక వృత్తము

ఒక వృత్తాన్ని, ఒక రేఖను ఒక కాగితంపై గీయమని అడిగామనుకోండి. వీటిని మూడు విధాలుగా మాత్రమే వ్యక్తపరచవచ్చునని సల్మాన్ వాదించాడు.

'O' కేంద్రముగా గల వృత్తము మరియు PQ రేఖను తీసుకొని ఈ మూడు విధాలను క్రింది పటాలలో పరిశీలిద్దాం.



పటం (i)లో, PQ రేఖకు, వృత్తానికి ఉమ్మడి బిందువు లేదు. ఈ సందర్భంలో PQ ను, వృత్తానికి అఖండిత రేఖ అంటాము.

పటం (ii)లో, PQ రేఖ, వృత్తాన్ని రెండు బిందువులు A మరియు Bవద్ద ఖండించింది. ఈ రెండు ఉమ్మడి బిందువులతో AB **జ్యా** ఏర్పడింది. ఈ సందర్భంలో PQ రేఖను వృత్తానికి ఖండిత రేఖ లేదా **ఛేదనరేఖ** అంటాము.

పటం (iii)లో, PQ రేఖకు వృత్తానికి ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఏర్పడింది. ఈ సందర్భంలో PQ రేఖను వృత్తానికి **స్పర్శరేఖ** అంటాము.

మనం ఈ రెండు పటాలను గమనిస్తే మరే ఇతర సంబంధాలను వీటి మధ్య ఏర్పరచలేమని తెలుస్తుంది. మనం ఇప్పుడు స్పర్శరేఖలు వ్యవస్థితం చెందే విధమును, వీటి ధర్మాలను, నిర్మాణాలను ఈ అధ్యాయంలో విపులంగా నేర్చుకుందాం.

మీకు తెలుసా ?

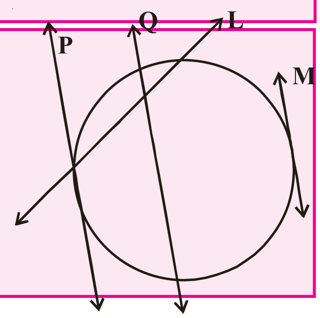
స్పర్శరేఖ (tangent) అనే పదం లాటిన్ పదం టాన్‌గ్రీ (tangere) అనే పదం నుండి వచ్చినది. దీని అర్థం 'స్పర్శించడం". ఈ పదాన్ని మొదటిసారిగా డెన్మార్క్ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు థామస్ ఫిన్కీ, 1583 సం॥లో ప్రవేశపెట్టాడు.

ఇవి చేయండి

i. ఏదైనా వ్యాసార్థంతో వృత్తం గీయండి. ఏవైనా వేర్వేరు బిందువుల వద్ద నాలుగు స్పర్శరేఖలను గీయండి. ఇంకనూ ఈ వృత్తానికి ఎన్ని సర్శరేఖలను గీయవచ్చు?

ii. వృత్తానికి బాహ్యంలో ఇచ్చిన బిందువు నుండి ఎన్ని స్పర్శరేఖలను నీవు గీయగలవు ?

iii. ప్రక్క పటంలో ఏ రేఖలు వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు అవుతాయి?

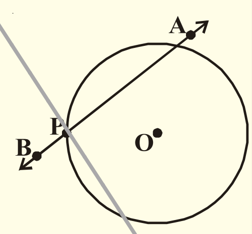


9.2 వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు

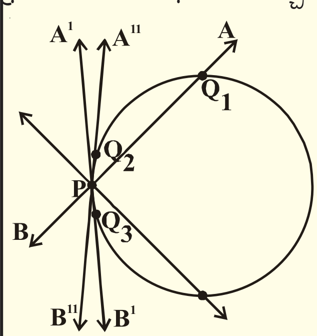
వృత్తంపై గల ఏ బిందువు నుండైనా స్పర్శరేఖను గీయగలమని తెలుసుకున్నారు. వృత్తం యొక్క తలంపై ఏదైనా బిందువు గుండా ఎన్ని స్పర్శరేఖలను గీయగలరో చెప్పగలరా ?

దీనిని అవగాహన చేసుకొనుటకు క్రింది కృత్యాన్ని పరిశీలిద్దాం.

కృత్యం



ఒక వృత్తాకార ఇనుప తీగను తీసుకొనండి. దానిపై ఒక బిందువు P వద్ద AB అనే మరొక రేఖ వంటి తిన్నని మరొక ఇనుప తీగను తీసుకొని, అది P గుండా భ్రమణం చెందే విధంగా అమర్చండి. ఇందులో వృత్తాకార ఇనుప తీగ వృత్తాన్ని AB ఇనుపతీగ సరళరేఖను తెలుపుతాయి. మరియు ఈ తీగ వృత్తాన్ని P వద్ద ఖండించిందనుకొనుము. ఈ వ్యవస్థ (పరికరం)ను బల్లపై ఉంచి,



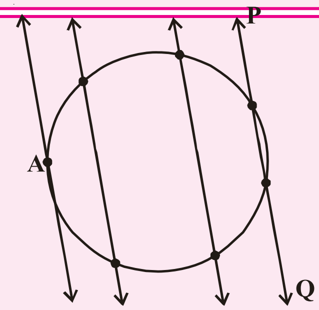
P బిందువు ఆధారంగా AB తీగను నెమ్మదిగా పటంలో చూపినట్లు కదుపుతూ వివిధ స్థానాలు వచ్చునట్లు చేయండి. ఈ తీగ P నుండి భ్రమణం చెందుతున్నప్పుడు మనం Q_1, Q_2 మరియు Q_3 బిందువులను గమనించవచ్చు. సాధారణంగా ఈ తీగ రెండు బిందువుల గుండా పోతున్నట్లు భావించవచ్చు. ఇందులో P ఒక ప్రత్యేక స్థానం (AB యొక్క $A'B'$ను

పరిశీలించండి). ఈ సందర్భంలో Pవద్ద మాత్రమే వృత్తాన్ని ఖండించింది. ఇది వృత్తానికి స్పర్శరేఖ AB యొక్క మిగిలిన అన్ని స్థానాలను పరిశలించండి. ఇది ప్రతి సందర్భంలోనూ P వద్దనే కాక మరొక బిందువు వద్ద కూడా ఖండిస్తున్నది. అందుచే A^1B^1 మాత్రమే వృత్తానికి P వద్ద స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

దీని నుండి వృత్తానికి P బిందువు వద్ద ఒకే ఒక స్పర్శరేఖ ఉంటుందని మనం గమనించవచ్చును.

AB తీగను ఏ దిశలో మార్చినను అది వృత్తాకార తీగను రెండు వేర్వేరు బిందువు వద్ద ఖండిస్తున్నట్లు తెలుస్తున్నది. ఈ సందర్భాలలో ఈ స్థానాలు అన్నియూ ఛేదన రేఖలను పోలి వుంటాయి. ఏ సందర్భంలో అయితే రెండు బిందువులు దగ్గరకు జరిగి ఏకీభవిస్తాయో ఆ ప్రత్యేక సందర్భంలో ఛేదన రేఖ మనకు స్పర్శరేఖగా మారుతుందని చెప్పవచ్చును.

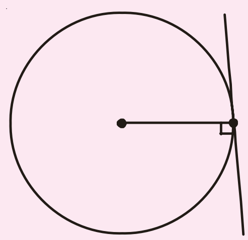
ఇది చేయండి

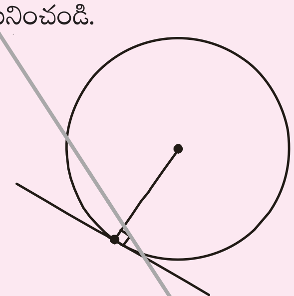


ఒక కాగితముపై వృత్తాన్ని గీచి, దానిపై PQ ఛేదన రేఖను పటములో చూపిన విధంగా గీయండి. ఈ ఛేదన రేఖకు సమాంతరముగా ఇరువైపులా మరికొన్ని రేఖలను గీయండి. ఛేదనరేఖ వృత్తకేంద్రము వైపుకు జరుగుతున్న కొలదీ 'వృత్తజ్యా' పొడవు ఏమైంది? ఏది పెద్ద జ్యా? ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా వుండే స్పర్శరేఖలను ఒక వృత్తానికి ఎన్నింటిని గీయగలరు?

వృత్తాన్ని స్పర్శరేఖ తాకునపుడు ఏర్పడిన ఉమ్మడి బిందువును మనము 'స్పర్శబిందువు' అంటాము మరియు స్పర్శబిందువు గుండా పోయే రేఖను మనం వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అంటాము.

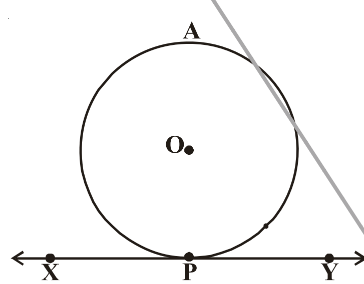
కింది పటాలలో వృత్తాలకు గీయబడిన స్పర్శరేఖలను గమనించండి.





వృత్తముపై గల ఒక బిందువు గుండా ఎన్ని స్పర్శరేఖలను మీరు గీయగలరు? వృత్తానికి మొత్తము ఎన్ని స్పర్శరేఖలుంటాయి? స్పర్శబిందువును గమనించండి. స్పర్శబిందువు గుండా వృత్త వ్యాసార్ధాలు గీయండి. స్పర్శరేఖకు, వ్యాసార్ధానికి మధ్య ఏర్పడిన కోణంలో ఏదైనా ప్రత్యేకత వుందా? ఇవి లంబాలుగా వున్నట్లు మీరు గమనించవచ్చు. దీనిని ఏవిధంగా నిరూపించవచ్చో పరిశీలిద్దాము.

సిద్ధాంతము-9.1 : ఒక వృత్తముపై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్ధానికి లంబముగా ఉంటుంది.

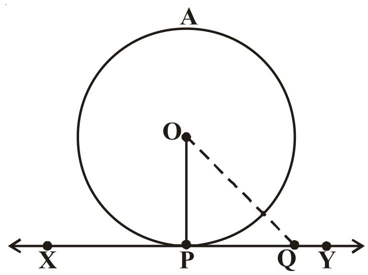


దత్తాంశము : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి స్పర్శరేఖ XY, P బిందువు గుండా గీయబడింది.

సారాంశము : OP , XY నకు లంబము అనగా ($OP \perp XY$).

ఉపపత్తి : ఇచ్చుట మనము నిరూపించవలసిన వాక్యాన్ని తప్పుగా భావించి ఒక కొత్త ప్రతిపాదన చేస్తాము.

ఈ ప్రతిపాదన లేదా ఊహ విరుద్ధతకు దారితీస్తుంది. ఈ పద్ధతిలో మనం OP అనేది XY పైన P కాకుండా మరొక బిందువు Q ను తీసుకొని OQ ను కలుపుదాం.



Q బిందువు ఖచ్చితంగా వృత్తానికి బాహ్యంలోనే వుంటుంది (ఎలా ?) (Q ఒక వేళ వృత్త అంతరంలో వుంటే XY అనేది వృత్తానికి స్పర్శరేఖ కాకుండా ఛేదన రేఖ అవుతుందని గమనించండి.)

అందువలన, OQ అనేది వ్యాసార్థం OQ అనేది వ్యాసార్థం OP కన్నా పొడవుగా వుంటుంది (ఎలా ?)

అంటే $OQ > OP$.

XY పైన గల ఏ ఇతర బిందువులకైన ఇది వర్తిస్తుంది. అందుచే 'O' నుండి XY పైకి గీయబడిన అన్ని పొడవులలో OP మాత్రమే మిక్కిలి చిన్నది అగును.

కనుక మనం ఊహించినట్లుగా OP, XY కు లంబంగా వుండదు అనే భావన తప్పు అని తేలినది.

అందువలన OP, XY రేఖకు లంబం

ఈ విధంగా నిరూపించబడినది.

గమనిక **:** వృత్త వ్యాసార్థానికి స్పర్శబిందువు గుండా గీయబడిన రేఖను ఆ వృత్తానికి ఆ బిందువు వద్ద అభిలంబం (normal) అని కూడా అంటారు.

ప్రయత్నించండి

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయంను నీవు ఏవిధంగా నిరూపిస్తావు?

"ఒక తలంలో వృత్తంపై వ్యాసార్థం యొక్క చివరి బిందువు గుండా గీయబడిన రేఖ దానికి లంబంగా వున్నచో ఆ రేఖా వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అగును".

పై సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి మనము మరికొన్ని ఫలితాలను రాబట్టవచ్చును.

(i) వృత్తంపై గల బిందువు P వద్ద ఒకే ఒక లంబము OP గీయవచ్చును. కావున, వృత్తపరిధిపై దత్తబిందువు గుండా ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను ఏర్పరచగలము.

(ii) వృత్తంపై గల బిందువుకు లంబంగా ఒకే ఒక రేఖ XY వుంటుంది కావున స్పర్శరేఖకు లంబముగా గీయబడిన రేఖ ఖచ్చితంగా వృత్త కేంద్రము గుండా పోవును.

వీటిని గూర్చి ఆలోచించి మీ స్నేహితులతోనూ, ఉపాధ్యాయుల తోనూ చర్చించండి.

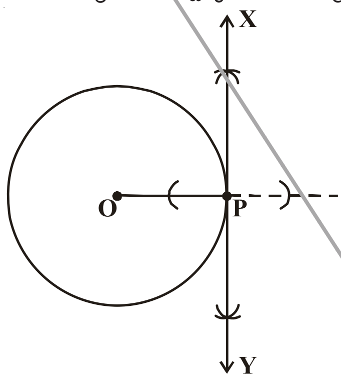
9.2.1 వృత్తానికి స్పర్శరేఖను నిర్మించుట

వృత్తంపై గల దత్త బిందువు గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను ఎలా నిర్మించవచ్చును? దీని కొరకు మనము ముందు తెలుసుకున్న స్పర్శరేఖ, స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్థానికి లంబముగా వుంటుంది. అనే ఫలితము వాడుకుందాము. అందుచే వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయడమంటే ఆ వృత్త వ్యాసార్థము చివరి బిందువు వద్ద లంబరేఖను గీయడమని అర్థము. వృత్త వ్యాసార్థము గీయాలంటే వృత్త కేంద్రము తెలియాలి.

ఈ నిర్మాణము యొక్క సోపానాలు మనము తెలుసుకుందాము.

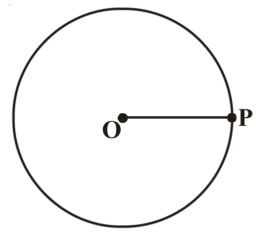
నిర్మాణము : వృత్తకేంద్రము తెలిసినపుడు వృత్తముపై గల బిందువు గుండా ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయడము.

మనకు 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తం మరియు వృత్తపరిధిపై P అనే బిందువు ఇవ్వబడినది. మనము P గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను నిర్మించాలి.



నిర్మాణ సోపానాలు :

1. 'O' కేంద్రముగా వృత్తాన్ని గీచి, దాని పరిధిపై 'P' అనే బిందువును గుర్తించాలి. OP ని కలపాలి.



2. P వద్ద వృత్తానికి లంబరేఖను పటంలో చూపినట్లుగా గీచి, XY అని పేరు పెట్టాలి.

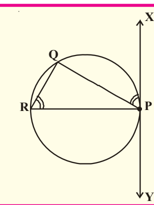
3. XY అనేది, వృత్తానికి P గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

P గుండా పోవునట్లు వృత్తానికి మరొక స్పర్శరేఖను నీవు గీయగలవా? కారణాలు తెలపండి.

ప్రయత్నించండి

వృత్త కేంద్రము తెలియని సందర్భములో వృత్తముపై గల బిందువు గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను ఎలాగీస్తావు?

సూచన : $\angle QPX$ మరియు $\angle PRQ$ అనే సమాన కోణాలను నిర్మించుము. నిర్మాణము వివరించండి.



9.2.2 స్పర్శరేఖ పొడవును కనుగొనుట

వృత్తానికి ఒక బిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవును మనము కనుగొనగలమా? వృత్తముపై గల ఏ బిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు కూడా సమానమేనా? కింది సమస్యలో పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తంలో వ్యాసార్థము 6 సెం.మీ. స్పర్శరేఖపై గల బిందువు P నుండి దూరము $OP = 10$ సెం.మీ అయిన స్పర్శరేఖా ఖండం PA ను కనుగొనుము.

సాధన : వృత్తస్పర్శరేఖ, స్పర్శబిందువు వద్ద దాని వ్యాసార్థానికి లంబము (సిద్ధాంతం 9.1)

ఇప్పుడు వృత్తానికి PA అనేది స్పర్శరేఖాండం మరియు OA వ్యాసార్థము

$\therefore OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90°$

ఇప్పుడు ΔOAP లో $OP^2 = OA^2 + PA^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

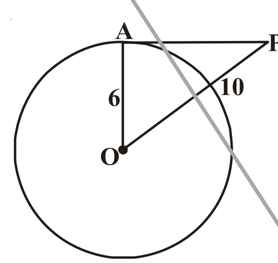
$10^2 = 6^2 + PA^2$

$100 = 36 + PA^2$

$PA^2 = 100 - 36$

$= 64$

$\therefore PA = \sqrt{64} = 8$ సెం.మీ.



అభ్యాసము - 9.1

1. కింది ఖాళీలను పూరించండి.

   (i) వృత్తాన్ని, ఒక స్పర్శరేఖ .... బిందువు(ల) వద్ద ఖండిస్తుంది.

   (ii) వృత్తాన్ని, ఒక రేఖ రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే దానిని .... అంటారు.

   (iii) ఒక వృత్తానికి గరిష్ఠంగా గీయగలిగే సమాంతర స్పర్శరేఖలు ....

   (iv) ఒక వృత్తానికి, దాని స్పర్శరేఖకు గల ఉమ్మడి బిందువును .... అంటారు.

   (v) ఒక వృత్తానికి మనము............. స్పర్శరేఖలను గీయగలము.

2. 5 సెం.మీ వ్యాసార్థము గా గల వృత్తాన్ని PQ స్పర్శరేఖ P వద్ద తాకింది. వృత్త కేంద్రము 'O' నుండి స్పర్శరేఖపై గల బిందువు Q నకు దూరము OQ = 12 సెం.మీ. అయిన PQ పొడవును కనుగొనుము.

3. ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. వృత్తానికి బాహ్యంలో గల ఒక రేఖకు సమాంతరముగా ఒక స్పర్శరేఖనూ, ఒక ఛేదన రేఖను గీయండి.

4. 9 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తానికి, దాని కేంద్రం నుండి 15 సెం.మీ దూరంలో ఒక బిందువు కలదు. అయిన దానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవును కనుగొనండి.

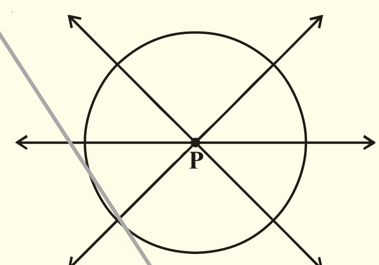
5. ఒక వృత్త వ్యాసము చివరి బిందువుల వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖలు సమాంతరమని చూపండి.

9.3 ఏదైనా బిందువు నుండి వృత్తానికి గీయదగు స్పర్శరేఖలు

ఒక తలములో ఏదైనా బిందువు నుండి వృత్తానికి గీయగలిగే స్పర్శరేఖల సంఖ్యను కింది కృత్యాన్ని చేసి తెలుసుకుందాము.

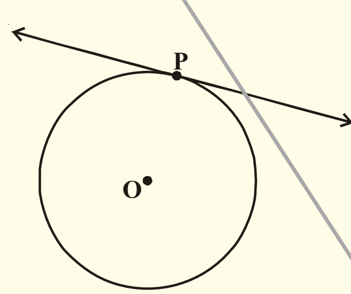
కృత్యము

(i) కాగితంపై వృత్తం గీయండి. దాని అంతరములో P అనే బిందువును తీసుకొండి. ఈ బిందువు గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయగలవా? ఈ బిందువు గుండా గీచే రేఖలన్నియూ వృత్తాన్ని రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తాయి. వీటిని ఏమంటారు? ఇవన్నియూ ఛేదన రేఖలు కదా! అందుచే వృత్త అంతరంలో గల ఏ బిందువు గుండా నైననూ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయుట సాధ్యము కాదు. (ప్రక్క పటమును చూడండి)



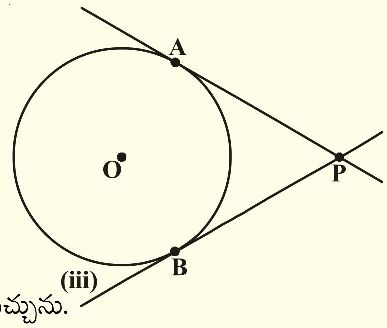
(i)

(ii) ఇప్పుడు, వృత్తపరిధిపై P అనే బిందువును తీసుకొని దాని నుండి స్పర్శరేఖను గీయండి. ఈ బిందువు గుండా ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను గీయగలరని మీరు పరిశీలించే వుంటారు. (ప్రక్క పటమును చూడండి)



(ii)

(iii) ఇప్పుడు, వృత్తానికి బాహ్యములో P బిందువును తీసుకొని ఆ బిందువు నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయడానికి ప్రయత్నించండి. మీరు ఏమి గమనించారు? మీరు ఖచ్చితంగా రెండు స్పర్శరేఖలను మాత్రమే ఈ బాహ్య బిందువు నుండి గీయగలమని తెలుసుకుంటారు. (ప్రక్క పటంను గమనించండి)



(iii)

మనం చేసిన కృత్యము ద్వారా క్రింది ఫలితాలను సాధారణీకరించవచ్చును.

సందర్భం (i) : వృత్త అంతరములో గల ఏ బిందువు గుండా నైనా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయలేము.

సందర్భం(ii) : వృత్తముపై గల ఏ బిందువుగుండానైనా పోవునట్లు వృత్తానికి ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను గీయవచ్చును.

సందర్భం (iii) : వృత్త బాహ్యంలో గల ఏదైనా బిందువు గుండా వృత్తానికి ఖచ్చితముగా రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును.

ఈ సందర్భములో వృత్తానికి A మరియు B అనేవి స్పర్శబిందువులు మరియు PA, PB లు స్పర్శరేఖలు.

వృత్తంలో బాహ్య బిందువు P నుండి స్పర్శబిందువునకు గీయబడిన రేఖాఖండం యొక్క పొడవును ఆ వృత్తానికి బాహ్య బిందువు P నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవు అంటాము.

పటం(iii) లో PA మరియు PB లను బాహ్య బిందువు P నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు అవుతాయని గమనించండి. ఈ పొడవులు PA మరియు PB ల మధ్య ఏదైనా సంబంధము వున్నదా?

సిద్ధాంతము-9.2 : వృత్తానికి బాహ్యబిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము

దత్తాంశము : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి, P అనే బిందువు బాహ్యంలో కలదు. P బిందువు గుండా వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు PA మరియు PB (పటం చూడండి)

సారాంశము : PA = PB

ఉపపత్తి : OA, OB మరియు OP లను కలపండి.

$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$ (సిద్ధాంతము 9.1 ప్రకారం వృత్త వ్యాసార్ధానికి స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణము)

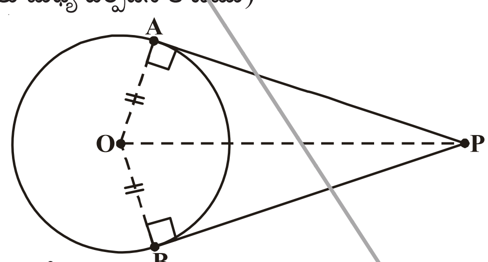
ఇప్పుడు ΔOAP మరియు ΔOBP లలో,

OA = OB (ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు)

OP = OP (ఉమ్మడి భుజము)

అందువలన లం.క.భు సర్వసమాన స్వీకృతం ప్రకారము

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$ అయినది.



దీని నుండి PA = PB అగును (సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సరూపభాగాలు)

నిరూపించబడినది.

ప్రయత్నించండి

పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి పై సిద్ధాంతమును నిరూపించడానికి ఉపపత్తిని రాయండి.

9.3.1. బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు నిర్మించుట

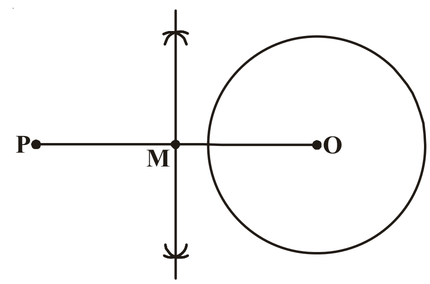
వృత్తానికి బాహ్యంలో ఒక బిందువు నుంచి, వృత్తానికి ఖచ్చితంగా రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చునని మీరు తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు ఈ స్పర్శరేఖలను ఏవిధంగా నిర్మిస్తారో తెలుసుకుందాం.

నిర్మాణము : బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను నిర్మించుట

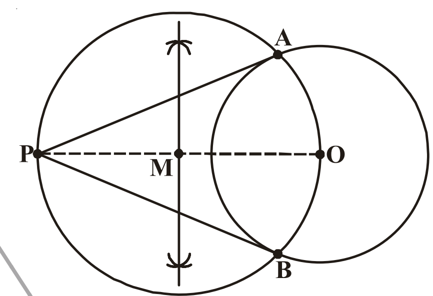
దత్తాంశము : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి బాహ్యంలో గల బిందువు P. మనం ఇప్పుడు P నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను నిర్మించాలి.

నిర్మాణ సోపానాలు :

సోపానం(i) : PO ను కలిపి, దానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయండి. PO మధ్య బిందువును 'M' గా గుర్తించండి.



సోపానం (ii) : M కేంద్రంగా PM లేదా MO వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. ఇది వృత్తాన్ని ఖండించే బిందువులను A మరియు B గా గుర్తించండి.



సోపానం (iii) : PA మరియు PB లను కలపండి. PA మరియు PB లు మనకు కావల్సిన స్పర్శరేఖలు అవుతాయి.

నిరూపణ : ఈ నిర్మాణమును ఏవిధముగా సమర్థించవచ్చునో పరిశీలిద్దాము.

OA ను కలపండి.

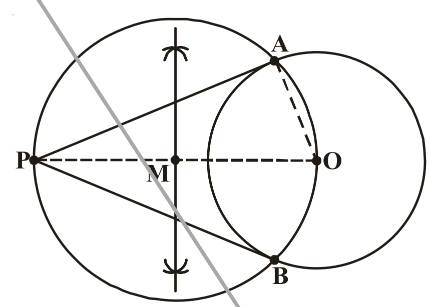
$\angle PAO$ అనేది అర్ధవృత్తంలో ఏర్పడిన కోణము

కావున, $\angle PAO = 90°$ అగును.

ఇప్పుడు $PA \perp OA$ అని చెప్పవచ్చునా?

OA వృత్తానికి వ్యాసార్ధం కావున సిద్ధాంతం 9.1 యొక్క విపర్యయమును బట్టి PA ఖచ్చితముగా స్పర్శరేఖ అగును. ఇదేవిధముగా, PB కూడా స్పర్శరేఖ అగును.

నిరూపించబడినది.



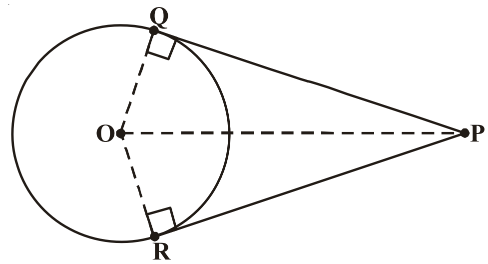
స్పర్శరేఖలు, ఛేదనరేఖలకు సంబంధించిన మరిన్ని ఆసక్తికరమైన ప్రవచనాలను వాటి నిరూపణలను పరిశీలిద్దాము.

ప్రవచనము-1 : వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణ సమద్విఖండన రేఖపై ఆ వృత్తం యొక్క కేంద్రం వుంటుంది. దీనిని ఏవిధంగా నిరూపించగలమో ఆలోచించండి.

నిరూపణ : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి P ఒక బాహ్యబిందువు. PQ మరియు PR లు P నుండి వృత్తంపైకి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు

OQ మరియు OR లను కలపండి

త్రిభుజాలు OQP మరియు ORP లు సర్వసమానాలు, ఎందుకంటే



$\angle OQP = \angle ORP = 90$ (సిద్ధాంతం 9.1)

$OQ = OR$ (వ్యాసార్థాలు)

OP ఉమ్మడి భుజము

సర్వసమాన త్రిభుజాల సరూప భుజాలు సమానము

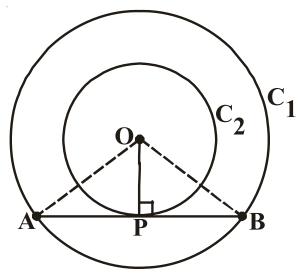
కావున $\angle OPQ = \angle OPR$ అగును.

కావున, OP అనేది $\angle QPR$ యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖ అగును.

దీని నుండి వృత్తకేంద్రము స్పర్శరేఖల మధ్య ఏర్పడిన కోణం యొక్క సమద్విఖండన రేఖపై వుందునని చెప్పవచ్చును.

ప్రవచనము-2 : రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలలో బాహ్యవృత్తము యొక్క జ్యా, అంతర వృత్తము యొక్క స్పర్శబిందువు వద్ద సమద్విఖండన అగును.

ఇది ఏవిధముగా సత్యము అగునో చూద్దాం.



నిరూపణ : O కేంద్రముగా గల రెండు వృత్తాలు C_1 మరియు C_2 అని ఇవ్వబడినవి. C_1 వృత్తము యొక్క జ్యా AB ను చిన్న వృత్తము C_2 ను P వద్ద తాకింది. (పటం చూడండి) మనము $AP = PB$ అగునని నిరూపించాలి.

O, Pల ను కలపండి.

C_2 వృత్తానికి AB స్పర్శరేఖ మరియు OP వ్యాసార్థము

కావున సిద్ధాంతము 9.1 ప్రకారము

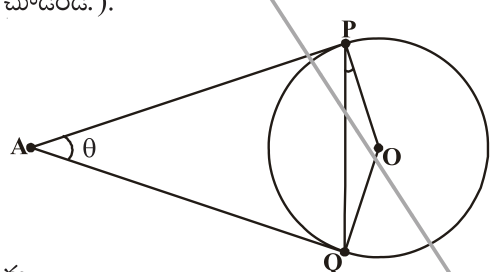
$OP \perp AB$ అగును.

ఇప్పుడు ΔOAP మరియు ΔOBP లు సర్వసమానాలు (ఎలా?) దీని నుండి $AP = PB$ అయినది. OP అనేది కేంద్రం నుండి గీయబడిన లంబము కావున అది AB జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.

ప్రవచనము-3 : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి బాహ్యబిందువు A నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు AP మరియు AQ అయిన $\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$ అగును.

దీనిని నిరూపించగలవా?

నిరూపణ : 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి బాహ్యబిందువు, A నుండి రెండు స్పర్శరేఖలు AP మరియు AQ లు గీయబడ్డాయి. ఇందులో P, Q లు స్పర్శబిందువులు (పటం చూడండి.).



మనము $\angle PAQ = 2\angle OPQ$ అని నిరూపించాలి.

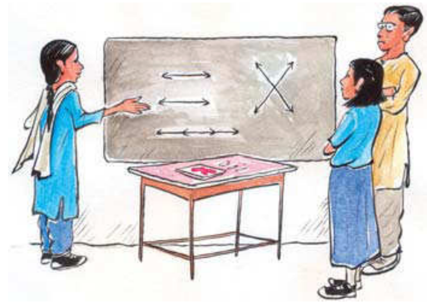
$\angle PAQ = \theta$ అయిన

ఇప్పుడు సిద్ధాంతము 9.2 ప్రకారము

$AP = AQ$ అగును.

కావున ΔAPQ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము అగును.

అందుచే, $\angle APQ + \angle AQP + \angle PAQ = 180°$ (మూడు కోణాల మొత్తము)



$$\angle APQ = \angle AQP = \frac{1}{2}(180° - \theta)$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\theta$$

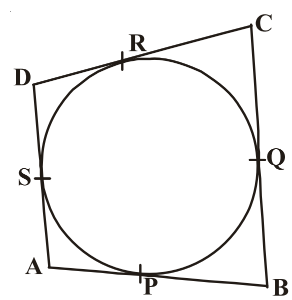
ఇదేవిధంగా, సిద్ధాంతము 9.1 ప్రకారము

$\angle OPA = 90°$

కావున, $\angle OPQ = \angle OPA - \angle APQ$

$$= 90° - \left[90 - \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

దీని నుండి ÐPAQ = 2ÐOPQ = 2ÐOQP అగును.



ప్రవచనము-4 : ఒక వృత్తము ABCD చతుర్భుజాన్ని P, Q, R, S బిందువుల వద్ద తాకింది.

అయిన AB+CD = BC + DA అగును.

నిరూపణ ఏవిధంగా మొదలుపెడతాం? AB, CD, BC, DA లు వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు. ఎందుకనగా చతుర్భుజము యొక్క నాలుగు భుజాలను తాకుతూ వృత్తంలో దాని అంతరములో గీయబడింది మరియు P,Q,R,S బిందువుల వద్ద స్పర్శించింది.

మరి ముందుకు ఎలా వెళతాము?

నిరూపణ : పటంలో చూపిన విధముగా ABCD భుజాలు AB, BC, CD మరియు DA లను వృత్తము P, Q, R, S బిందువుల వద్ద వరుసగా స్పర్శించింది,

సిద్ధాంతము 9.2 ప్రకారము, బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తం పైకి గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము కావున

$AP = AS$

$BP = BQ$

$DR = DS$

మరియు $CR = CQ$

వీటిని కలుపగా, మనకు

$AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ$

లేదా $(AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)$

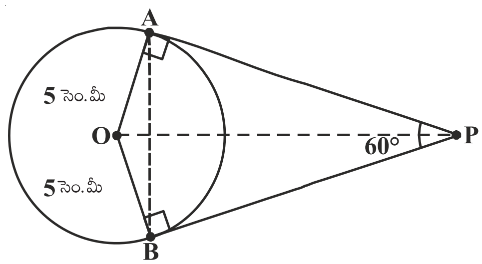
లేదా $AB + CD = BC + DA.$

ఇప్పుడు మనము ఇచ్చిన పరిస్థితికి అనుగుణముగా విశ్లేషణ చేసి నిర్మాణమును ఏవిధంగా చేయవచ్చునో కింది ఉదాహరణ ద్వారా తెలుసుకుందాము.

ఉదాహరణ-1. వృత్త వ్యాసార్థము 5సెం.మీ మరియు రెండు స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము $60°$ అయిన ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయండి.

సాధన : వృత్తం గీచి దానికి రెండు స్పర్శరేఖలను గీయుటను మనం పరిశీలిద్దాము. మనకు వృత్తవ్యాసార్థము మరియు రెండు స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము ఇవ్వబడింది. వృత్తకేంద్రం నుండి బాహ్యబిందువునకు గల దూరముగాని, స్పర్శరేఖల పొడవులుగాని మనకు తెలియవు. కాని మనకు స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము మాత్రమే తెలుసు. దీని నుపయోగించి బాహ్యబిందువు నుండి కేంద్రానికి గల దూరాన్ని కనుగొంటే, మనము స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును.

దీనిని ప్రారంభించడానికి ముందు 5సెం.మీ వ్యాసార్థముగల వృత్తాన్ని పరిశీలిద్దాము. బాహ్యబిందువు 'P' నుండి PA మరియు PB లు అనేవి వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు మరియు వీటి మధ్య కోణము $60°$



దీనిలో $\angle APB = 60°$. OP ని కలుపండి. OP అనేది $\angle APB$ కి సమద్విఖండన రేఖ అని మనకు తెలుసు.

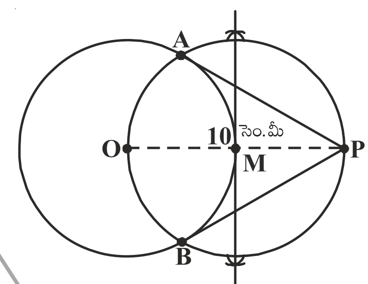
కావున $\angle OPA = \angle OPB = \dfrac{60°}{2} = 30^0$

$[\because \Delta OAP \cong \Delta OBP]$

ఇప్పుడు ΔOAP లో $\text{Sin } 30° = \dfrac{\text{ఎదుటిభుజము}}{\text{కర్ణము}} = \dfrac{OA}{OP}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{OP}$ (త్రికోణమితి నిష్పత్తుల నుండి)

$\Rightarrow OP = 10$ సెం.మీ.



మనం ఇప్పుడు 'O' కేంద్రముగా 5సెం.మీ వ్యాసార్థంతో వృత్తము గీద్దాము. కేంద్రం నుండి 10సెం.మీ దూరంలో 'P' అనే బిందువును గుర్తిద్దాము. OP ని కలిపి నిర్మాణము 9.2లో చూపిన విధముగా పూర్తి చేద్దాము.
PA మరియు PB అనేవి వృత్తానికి గీయబడిన ఒక జత స్పర్శరేఖలు ఏర్పడతాయి.

ప్రయత్నించండి

పైన తెల్పిన నిర్మాణాన్ని మరొక విధంగా చేయడానికి ప్రయత్నించండి.

$\angle BOA = 120^0$ అగునట్లు OA మరియు OB వ్యాసార్థాలను గీయండి. $\angle BOA$కు సమద్విఖండన రేఖను గీచి OA, OB లకు A మరియు Bల వద్ద లంబరేఖలు గీయండి. ఈ రేఖలు $\angle BOA$ సమద్విఖండన రేఖను బాహ్యబిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి. వీటినే మనకు కావల్సిన స్పర్శరేఖలుగా తీసుకొనవచ్చు. నిర్మాణము చేయండి. సమర్థించండి.

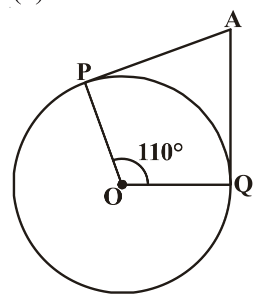
అభ్యాసము - 9.2

1. కింది వానికి సరియగు సమాధానమును గుర్తించి ప్రతి జవాబును సమర్థించండి.
   (i) ఒక వృత్త స్పర్శరేఖకు, స్పర్శబిందువు గుండా గీచిన వ్యాసార్థానికి మధ్య కోణము
   (a) $60°$ (b) $30°$ (c) $45°$ (d) $90°$

(ii) Q అనే బిందువు నుండి వృత్తం మీదకు గీయబడిన స్పర్శ రేఖా పొడవు 24 సెం.మీ. మరియు వృత్తకేంద్రం నుండి Q బిందువుకు గల దూరం 25 సెం.మీ. అయిన వృత్త వ్యాసార్థము

(a) 7సెం.మీ (b) 12 సెం.మీ (c) 15సెం.మీ (d) 24.5సెం.మీ

(iii) ప్రక్కపటంలో 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి AP మరియు AQ లు రెండు స్పర్శరేఖలు మరియు $\angle POQ = 110°$, అయిన $\angle PAQ$ =



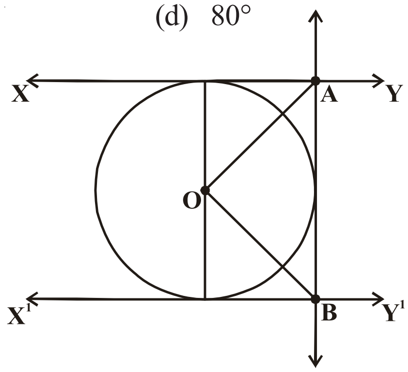
(a) 60° (b) 70°

(c) 80° (d) 90°

(iv) 'O' కేంద్రముగా వృత్తానికి బాహ్యబిందువు P నుండి PA మరియు PB అనే రెండు స్పర్శరేఖలు గీయబడ్డాయి. స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము 80° అయిన $\angle POA$ =

(a) 50° (b) 60° (c) 70° (d) 80°

(v) ప్రక్కపటంలో 'O' కేంద్రముగా గల వృత్తానికి XY మరియు X^1Y^1 అనే రెండు సమాంతర స్పర్శరేఖలు గీయబడ్డాయి. మరొక స్పర్శరేఖ AB, స్పర్శ బిందువు C గుండాపోతూ XYను A వద్ద X^1Y^1 ను B వద్ద ఖండించింది అయిన $\angle AOB$ =



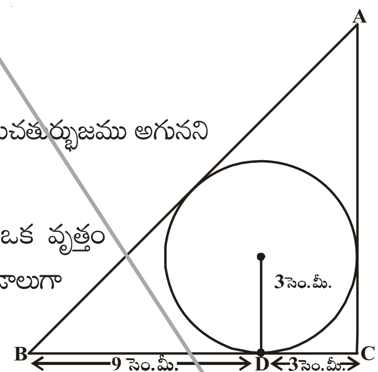
(a) 80° (b) 100°

(c) 90° (d) 60°

2. 5 సెం.మీ మరియు 3 సెం.మీ వ్యాసార్థములతో రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలు గీయబడ్డాయి. చిన్న వృత్తాన్ని స్పర్శించే పెద్ద వృత్తము యొక్క జ్యా పొడవును కనుగొనండి.

3. ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో వృత్తము అంతర్లిఖించబడిన అది సమచతుర్భుజము అగునని చూపండి.

4. ప్రక్క పటము త్రిభుజం ABC లో 3 సెం.మీ వ్యాసార్థముగల ఒక వృత్తం అంతర్లిఖించబడింది. స్పర్శబిందువు D, BC భుజాన్ని రెండు రేఖా ఖండాలుగా BD = 9 సెం.మీ. DC = 3 సెం.మీగా విభజించింది. అయిన AB మరియు AC భుజాల పొడవులు కనుగొనండి.



5. 6 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. కేంద్రము నుండి 10 సెం.మీ దూరములో బిందువు నుండి ఒక జత స్పర్శరేఖలను గీచి, వాటి పొడవులు కొలవండి. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించి సరిచూడండి.

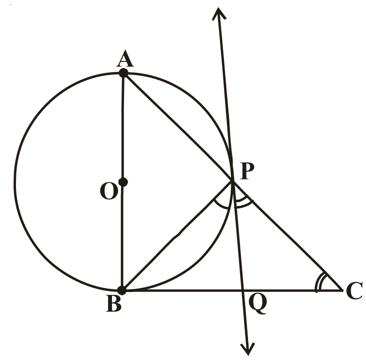
3 సెం.మీ

6. 4 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తానికి, 6 సెం.మీ వ్యాసార్థముగల ఏక కేంద్ర వృత్తంపై గల ఒక బిందువు నుండి స్పర్శరేఖను గీయండి. దాని పొడవును కొలవండి. గణనచేసి సరిచూడండి.

D

7. ఒక చేతి గాజు సహాయంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. దాని బాహ్యంలో ఒక బిందువు తీసుకోండి. ఈ బిందువు నుండి వృత్తము పైకి ఒక జత స్పర్శరేఖలను గీచి కొలవండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

8. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము ABCలో AB వ్యాసంగా గల ఒక వృత్తము కర్ణము AC ని P వద్ద ఖండించునట్లు గీయబడింది. P గుండా వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖ BC భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని నిరూపించండి. .

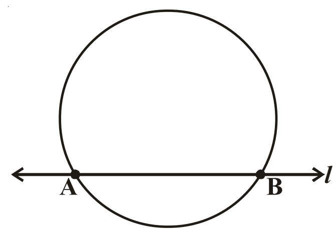


9. 'O' కేంద్రముగా వృత్తానికి బాహ్యంలో గల బిందువు 'R' గుండా స్పర్శరేఖను గీయండి ఈ బిందువు నుండి మీరు ఎన్ని స్పర్శరేఖలను గీయగలరు?

(సూచన : ఈ రెండు బిందువుల నుండి స్పర్శబిందువు సమాన దూరంలో ఉన్నది)

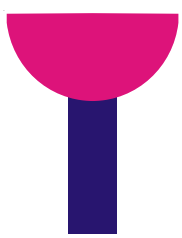
9.4 ఛేదన రేఖతో ఏర్పడే వృత్తఖండము

మనము ఒక వృత్తము మరియు రేఖను పరిశీలించాము. వృత్తాన్ని, రేఖ ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకితే దానిని మనము స్పర్శరేఖ అన్నాము. రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించే దానిని ఛేదనరేఖ అనియూ, ఆ రెండు బిందువులతో ఏర్పడే రేఖా ఖండాన్ని 'జ్యా' అని అన్నాము.



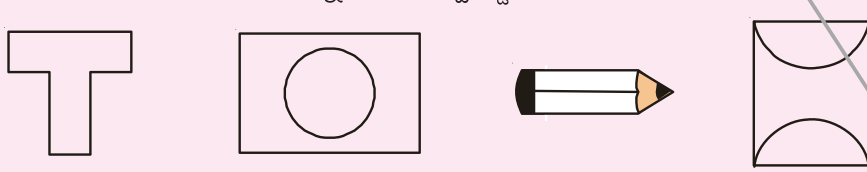
ప్రక్కపటములో 'l' రేఖ ఛేదనరేఖ మరియు AB జ్యా

శంకర్ గులాబీ మరియు నీలం రంగు కాగితాలను అతికించి పటము తయారుచేస్తున్నాడు. ఇదేవిధంగా మరికొన్ని పటాలను కూడా రూపొందించాడు. శుభ్రత తొట్టె (washbasin) ఆకారములో ఒక పటము రూపొందించాడు. ఈ పటము రూపొందించడానికి అతనికి ఎంత కాగితము అవసరము? ఈ పటము రెండు భాగాలుగా కనిపిస్తున్నది. ఒక భాగము దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము కనుగొనుట మీకు తెలుసు. మరి వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యము ఎలా కనుగొంటారు ? కింది చర్చలో మనము దీని యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుటను తెలుసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.



ఇది చేయండి

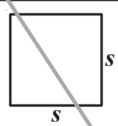
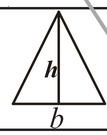
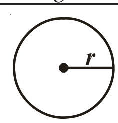
శంకర్ రూపొందించిన మరికొన్ని పటాలు ఇవ్వబడ్డాయి.



ఈ పటాల ఆకారాలను ఏవిధంగా విభజిస్తే వీటి వైశాల్యాలు సులభముగా కనుగొనగలము?

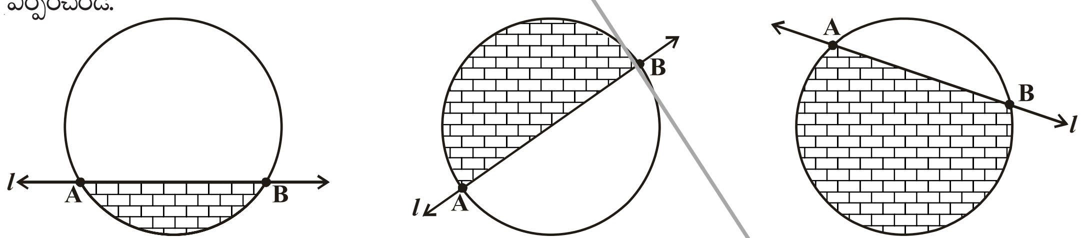
మీరు ఇటువంటి మరికొన్ని పటాలను రూపొందించి, విభిన్న పటాలుగా విభజించండి.

మనము కొన్ని జ్యామితీయ పటాల వైశాల్యాలను ఏవిధంగా కనుగొంటారో కింది పట్టిక ద్వారా గుర్తుకు తెచ్చుకుందాము.

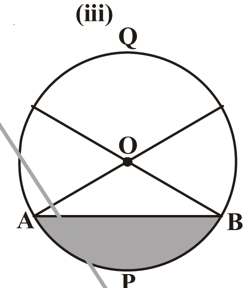
వ.సంఖ్య	పటము	కొలతలు	వైశాల్యము
1.		పొడవు $= l$ వెడల్పు $= b$	$A = lb$
2.		భుజము = s	$A = s^2$
3.		భూమి $= b$	$A = \frac{1}{2} bh$
4.		వ్యాసార్థము $= r$	$A = \pi r^2$

9.4.1. వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుట

వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యమును అంచనావేయుటకు వృత్తానికి ఛేదన రేఖలను గీచి వృత్త ఖండాలను ఏర్పరచండి.

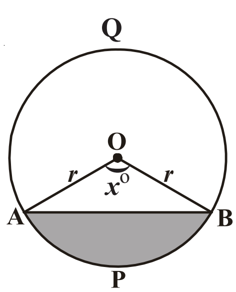


(i) (ii) (iii)



వృత్త చాపము చేతను, జ్యా చేతను ఏర్పడే వృత్త ప్రదేశమును వృత్త ఖండము అంటారని మీకు తెలుసు. దీని వైశాల్యము షేడ్ చేసిన భాగం ( ) తెలుపుతుంది. పటము (i) లో అల్ప వృత్తఖండములో పటము(ii) లో అర్థవృత్తము మరియు పటము (iii) లో అధిక వృత్త ఖండము తెలుపుతాయి.

ఈ వృత్త ఖండ వైశాల్యములను ఎలా కనుగొంటాము? కింది కృత్యము చేసి తెలుసుకుందాము.



ఒక వృత్తాకార కాగితాన్ని తీసుకొని, వ్యాసము కన్నా తక్కువైన జ్యాను తీసుకొని, పటములో చూపిన విధముగా దాని వెంబడి మడవండి. ఏర్పడిన చిన్న భాగాన్ని షేడ్ చేయండి. ఈ షేడ్ చేసిన భాగాన్ని ఏమంటారు? ఇది అల్ప వృత్త ఖండము (APB) మరి మిగిలిన షేడ్ చేయబడని వృత్త భాగాన్ని ఏమంటారు? ఇది ఖచ్చితముగా అధికవృత్త ఖండము(AQB) అవుతుంది.

మీరు వృత్తము యొక్క సెక్టరు గురించి, వృత్తఖండము గురించి క్రింది తరగతులలో కొంత మేరకు నేర్చుకున్నారు. ప్రక్కపటములో కొంత షేడ్ కాని ప్రాంతము, షేడ్ చేసిన ప్రాంతము (అల్పవృత్త ఖండము) కలసి సెక్టరు అయింది. అంటే ఇది ఒక త్రిభుజము మరియు వృత్త ఖండముల కలయిక.

ఇచ్చిన పటంలో 'O' కేంద్రము, 'r' వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో OAPB ఒక సెక్టరు. $\angle AOB$ కోణ పరిమాణము 'x°' అనుకొనుము.

వృత్తకేంద్రం వద్ద 360° కోణమును ఏర్పరుచునపుడు ఆవృత్తము వైశాల్యము πr^2 అని మీకు తెలుసు.

కావున, వృత్తకేంద్రము వద్ద 1° కోణము చే ఏర్పడు సెక్టరు వైశాల్యము $\frac{1^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$.

అందుచే, వృత్తకేంద్రము వద్ద కోణ పరిమాణము x° అయిన సెక్టరు వైశాల్యము $\frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$.

ఇప్పుడు 'O' కేంద్రము, 'r' వ్యాసార్థముగా ఏర్పడిన వృత్త ఖండము APB యొక్క వైశాల్యమును మనం పరిశీలిస్తే

APB వృత్తఖండము వైశాల్యము = OAPB సెక్టరు వైశాల్యము - ΔOAB వైశాల్యము

$$= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ వైశాల్యము}$$

ప్రయత్నించండి

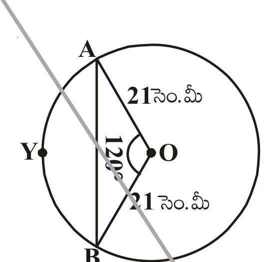
అల్ప వృత్త ఖండ వైశాల్యమును ఉపయోగించి అధికవృత్తఖండ వైశాల్యమును ఏవిధముగా కనుగొంటావు?

ఇవి చేయండి

1. వృత్త వ్యాసార్థము 7 సెం.మీ మరియు దిగువ సెక్టరు కోణాలకు తగినట్లు సెక్టరు వైశాల్యము కనుగొనుము.
   i. 60° ii. 30° iii. 72° iv. 90° v. 120°
2. ఒక గడియారంలో నిమిషాల ముల్లు పొడవు 14 సెం.మీ 10 నిమిషాలలో ఈ ముల్లుచే ఏర్పడే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.

ఇప్పుడు వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుటకు ఒక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1. పక్క పటములో వృత్త వ్యాసార్థము 21 సెం.మీ. మరియు $\angle AOB = 120^0$ అయిన వృత్తఖండము AYB వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ మరియు $\sqrt{3} = 1.732$ గా తీసుకోండి)



సాధన : AYB వృత్తఖండ వైశాల్యము

= OAYB సెక్టరు వైశాల్యము – ΔOAB వైశాల్యము

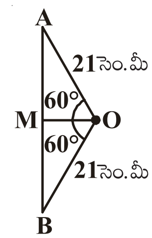
ఇప్పుడు OAYB సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{120^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ చ.సెం.మీ

= 462 చ.సెం.మీ

ΔOAB వైశాల్యము కనుగొనుటకు పటములో చూపిన విధముగా $OM \perp AB$ ను గీయాలి.

$OA = OB$ కావున లం.క.భు. సర్వసమాన నియమము ప్రకారము $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ అగును.

కావున, AB మధ్యబిందువు M అగును మరియు



$$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$$

ఇప్పుడు $OM = x$ సెం.మీ అనుకొనిన

ΔOMA నుండి, $\frac{OM}{OA} = \cos 60^0$.

లేదా, $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\because \cos 60^0 = \frac{1}{2}\right)$

లేదా, $x = \frac{21}{2}$

కావున, $OM = \frac{21}{2}$ సెం.మీ

అలాగే, $\frac{AM}{OA} = \sin 60°$

$\Rightarrow \frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

కావున, $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ సెం.మీ.

అందుటవలన $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ సెం.మీ. $= 21\sqrt{3}$ సెం.మీ.

దీని నుండి ΔOAB వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ చ.సెం.మీ

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ చ.సెం.మీ ...(2)

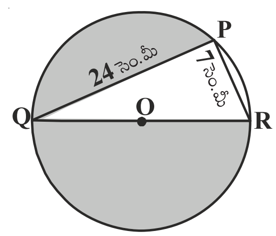
ఈ విధంగా (1), (2) లను బట్టి

AYB వృత్తఖండం వైశాల్యము $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ చ.సెం.మీ

$= \frac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ చ.సెం.మీ

$= 271.047$ చ.సెం.మీ

ఉదాహరణ-2. ప్రక్క పటములో O కేంద్రముగా వృత్తములో PQ = 24 సెం.మీ., PR = 7 సెం.మీ మరియు వ్యాసము QR అని ఇవ్వబడింది. షేడ్ చేయబడిన వృత్తఖండము వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకొండి)



సాధన : షేడ్ చేయబడిన వృత్తఖండం వైశాల్యము = OQPR సెక్టరు వైశాల్యము - PQR త్రిభుజ వైశాల్యము.

QR వ్యాసము కావున, $\angle QPR = 90°$ (అర్ధవృత్తములో కోణము)

పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి,

ΔQPR, $QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49$

$= 625$

$QR = \sqrt{625} = 25$ సెం.మీ

దీని నుండి వృత్త వ్యాసార్ధము $= \frac{1}{2} QR$

$= \frac{1}{2}(25) = \frac{25}{2}$ సెం.మీ

ఇపుడు, OQPR అర్ధవృత్తము వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2}$

$= 327.38$ చ.సెం.మీ ..... (1)

QPR లంబకోణ త్రిభుజవైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times PR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 24$

$= 84$ చ.సెం.మీ ..... (2)

(1), (2) లను బట్టి,

షేడ్‌చేయబడిన వృత్తఖండము వైశాల్యము $= 327.38 - 84$

$= 243.38$ చ.సెం.మీ

ఉదాహరణ-3. ప్రక్కపటములో చూపిన విధముగా ఒక గుండ్రని ఉపరితలముగల బల్లపై ఆరు సమాన ఆకృతులు కలవు. బల్లపై తలము యొక్క వ్యాసార్ధము 14 సెం.మీ అయిన చ.మీ ₹5 చొప్పున బల్లపై గల ఆకృతులకు రంగు వేయడానికి ఎంతఖర్చు అవుతుంది. ($\sqrt{3} = 1.732$ తీసుకోండి)

సాధన : వృత్తములో అంతర్లిఖించబడిన క్రమషడ్భుజి యొక్క భుజము వృత్త వ్యాసార్థానికి సమానమని మనకు తెలుసు.

$\therefore$ క్రమషడ్భుజి యొక్క ఒక్కొక్క భుజము $= 14$ సెం.మీ

అందువలన, ఆకృతి చేయబడిన ఆరు వృత్త ఖండాల వైశాల్యము = వృత్తవైశాల్యము - క్రమషడ్భుజి వైశాల్యము

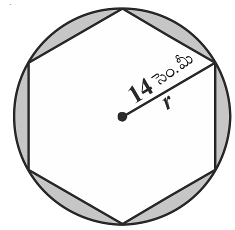
ఇపుడు, వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616 \text{ చ.సెం.మీ} \quad ..... (1)$$

క్రమషడ్భుజి వైశాల్యము $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14$$

$$= 509.2 \text{ చ.సెం.మీ} \quad ..... (2)$$



(1), (2)లను బట్టి ఆరుఆకృతుల మొత్తం వైశాల్యం

$$= 616 - 509.21$$

$$= 106.79 \text{ చ.సెం.మీ}$$

దీని నుండి, చ.మీ ₹5 చొప్పున ఆరు ఆకృతులకు రంగు వేయుటకు అయ్యే ఖర్చు

$$= ₹106.79 \times 5$$

$$= ₹533.95$$

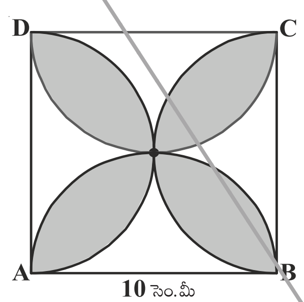
అభ్యాసము - 9.3

1. 10 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో ఒక జ్యా కేంద్రము వద్ద లంబకోణాన్ని ఏర్పరిస్తే, కింది ఇవ్వబడిన వృత్తఖండాల వైశాల్యాలు కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ అని తీసుకోండి.)

   i. అల్ప వృత్తఖండము ii. అధిక వృత్త ఖండము

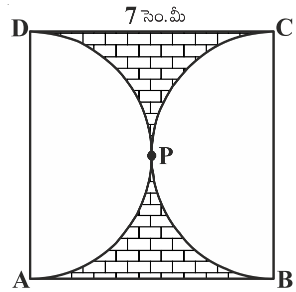
2. 12 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో ఒక జ్యా కేంద్రము వద్ద $120°$ కోణాన్ని ఏర్పరచింది. జ్యాతో ఏర్పడిన సంబంధిత అల్పవృత్త ఖండం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ మరియు $\sqrt{3} = 1.732$ తీసుకోండి)

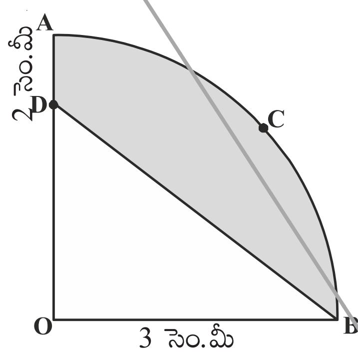
3. ఒక కారు అద్దముపై ఒకదానిపై అధ్యారోహణము (over lap) కాని నీటిని తుడిచే రెండు వైపర్లు వున్నాయి. ప్రతి వైపర్ పొడవు 25 సెం.మీ. $115°$ కోణముతో నీటిని తుడుస్తున్నది. ఒకేసారి రెండు వైపర్లు పనిచేయు సందర్భములో మొత్తం అద్దాన్ని శుభ్రపరిచే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసుకోండి.)



4. ప్రక్కపటములో ABCD చతురస్రం యొక్క భుజము 10 సెం.మీ పొడవు కలిగి వున్నది మరియు చతురస్రభుజము వ్యాసముగా గల అర్థవృత్తాలు ప్రతిభుజము వైపున గీయబడ్డాయి. షేడ్ చేయబడిన ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = 3.14$ అని తీసుకోండి.)

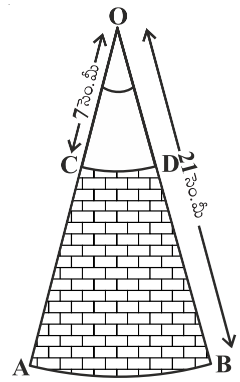
5. పక్కపటంలో ABCD చతురస్రభుజము 7 సెం.మీ మరియు APD మరియు BPC లు అర్థవృత్తములు అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశవైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ ను తీసుకొండి)

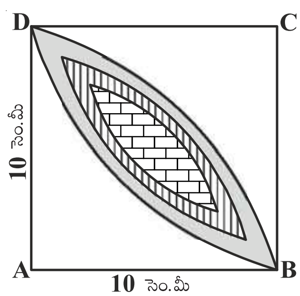




6. ప్రక్క పటములో 'O' కేంద్రము మరియు 3.5 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో OACB అనేది ఒక సెక్టరు పాదము OD = 2 సెం.మీ అయిన షేడ్ చేసిన ప్రాంత వైశాల్యము కనుగొనుము. ($\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసుకోండి)

7. 'O' కేంద్రము గాగల రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాల వ్యాసార్థాలు వరుసగా 21సెం.మీ మరియు 7 సెం.మీ మరియు AB, CD లు రెండు చాపరేఖలు (పటము చూడండి). $\angle AOB = 30^\circ$ అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసుకోండి)



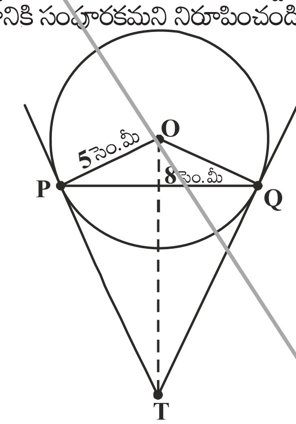


8. పక్కపటంలో వ్యాసార్థము 10 సెం.మీ గా గల వృత్తంలో రెండు సెక్టరు పాదముల మధ్య ఏర్పడిన ఉమ్మడి ప్రదేశం (షేడ్ చేయబడినది) యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ అని తీసుకోండి)

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

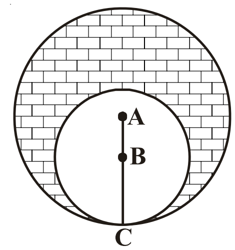
[పరీక్షలకొరకు నిర్దేశించబడినది కాదు]

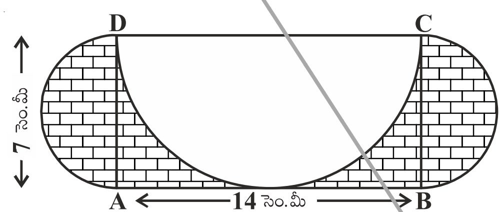
1. బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తము పైకి గీయబడిన రెండు స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము మరియు రెండు స్పర్శ బిందువులను కేంద్రంతో కలుపుతూ గీయబడిన రేఖా ఖండాలు ఏర్పరచిన కోణానికి సంపూరకమని నిరూపించండి.
2. 5 సెం.మీ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో PQ జ్యా పొడవు 8సెం.మీ. P మరియు Q గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖలు T వద్ద ఖండించుకున్నాయి. (పటము చూడండి) అయిన TP పొడవును కనుగొనండి.
3. ఒక చతుర్భుజములో వృత్తము దాని నాలుగు భుజాలను తాకుతూ అంతర్లిఖించబడి వున్నచో ఆ చతుర్భుజము ఎదుటి భుజాలు వృత్త కేంద్రము వద్ద చేయు కోణాలు సంపూరకాలని నిరూపించండి.
4. 8 సెం.మీ పొడవు గల AB రేఖాఖండాన్ని గీయండి. A కేంద్రముగా 4 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తము, B కేంద్రముగా 3సెం.మీ వ్యాసార్థముతో మరొక వృత్తము గీయండి. ఒక వృత్త కేంద్రము నుండి మరొక వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయండి.



5. ABC లంబకోణ త్రిభుజములో $AB = 6$ సెం.మీ, $BC = 8$ సెం.మీ మరియు $\angle B = 90^0$. B శీర్షం నుండి AC పైకి గీయబడిన లంబము BD మరియు B, C, D బిందువుల గుండా వృత్తము గీయబడింది. A నుండి ఈ వృత్తముపైకి స్పర్శరేఖలను గీయండి.

6. A, B కేంద్రాలుగా గల రెండు వృత్తాలు C వద్ద స్పర్శించుకున్నాయి. $AC = 8$ సెం.మీ. మరియు $AB = 3$ సెం.మీ అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.





7. $AB = 14$ సెం.మీ. మరియు $BC = 7$ సెం.మీ కొలతలు ABCD దీర్ఘచతురస్రము గీయబడింది. DC, BC మరియు AD వ్యాసాలుగా గల మూడు అర్ధవృత్తాలు పటములో చూపినట్లుగా గీయబడినవి. అయిన షేడ్ చేసిన ప్రదేశ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

మనం ఏమి చర్చించాం

మనము ఈ అధ్యాయములో క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నాము.

1. వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ మరియు ఛేదనరేఖలకు నిర్వచనాలు. వృత్త జ్యా యొక్క భావనను కూడా ఉపయోగించుకున్నాము.
2. వివిధ రకాల త్రిభుజాల భావనలు ముఖ్యంగా లంబకోణ త్రిభుజాలు మరియు సమద్విబాహు త్రిభుజాలను గూర్చి తెలుసుకున్నాము.
3. కింది సిద్ధాంతాలను నేర్చుకున్నాము.

   a) వృత్తముపై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్థానికి లంబముగా వుంటుంది.

   b) వృత్తానికి బాహ్య బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.
4. కింది నిర్మాణాలను చేయుట నేర్చుకున్నాము.

   a) వృత్తకేంద్రము, వృత్త పరిధిపై ఒక బిందువు ఇచ్చినపుడు ఆ బిందువు గుండా వృత్తానికి స్పర్శరేఖను నిర్మించుట.

   b) బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తానికి ఒక జత స్పర్శరేఖలను నిర్మించుట.
5. వృత్తాలకు, స్పర్శరేఖలకు సంబంధించిన కొన్ని ప్రవచనాలను ఏవిధంగా నిరూపించవచ్చునో తెలుసుకున్నాము. ఈ విధానములో కొన్ని పూర్వఫలితాలను ఉపయోగించుకొని తార్కికముగా నిరూపించి నూతన ఫలితాలను రాబట్టాము.
6. మనం అల్ప వృత్త ఖండ/అధిక వృత్త ఖండ వైశాల్యాలు కనుగొనుట నేర్చుకున్నాము.

   వృత్త ఖండము యొక్క వైశాల్యము = సంబంధిత సెక్టరు వైశాల్యము - సంబంధిత త్రిభుజ వైశాల్యము.