అధ్యాయము

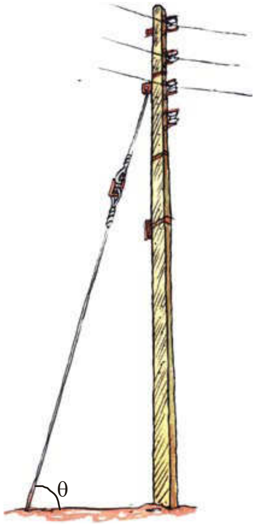
11

# త్రికోణమితి
(Trigonometry)

## 11.1 పరిచయం

త్రిభుజాలు మరియు వాటి ధర్మాలను మనం ఇదివరకే కింది తరగతులలో తెలుసుకొన్నా. మన నిత్యజీవితంలో వివిధ సందర్భాలలో త్రిభుజాలు, వాటి ధర్మాలను ఉపయోగించడం గమనించి ఉంటాం.

ఇంకా మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనిద్దాం.

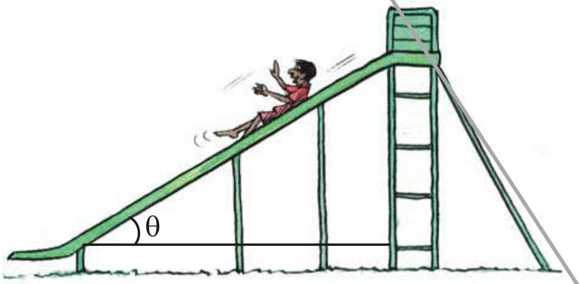



- మీరు మీ చుట్టు ప్రక్కలలో విద్యుత్ స్థంభాలను గమనించి ఉంటారు. అవి సాధారణంగా ఒక లోహపు వైర్ సహాయంతో నిలబెట్టబడి ఉంటాయి. ఇచట విద్యుత్ స్థంభం, భూమి మరియు లోహపు వైర్‌లు ఒక త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి. కాని, ఒకవేళ లోహపు వైర్ పొడవును తగ్గిస్తే, అది భూమితో చేసే కోణంలో ఏమైనా మార్పు వస్తుందా?

- పటంలో చూపిన విధంగా ఒక వ్యక్తి ఒక గోడకు నిచ్చెన సహాయంతో సున్నం వేస్తున్నాడు. ఒకవేళ అతడు కొంత ఎక్కువ ఎత్తులో సున్నం వేయాల్సివస్తే, అతడు ఏం చేయాలి? అపుడు భూమితో నిచ్చెన చేసే కోణంలో ఏం మార్పు వస్తుంది?

- ఆదిలాబాద్ జిల్లాలోని జైనథ్ గ్రామంలో 13వ శతాబ్దంలో నిర్మించబడిన ఒక గుడిలో డిసెంబర్ మాసంలో ఒక రోజు సూర్యనారాయణ స్వామి విగ్రహం పాదాలపై సూర్యుడి మొట్టమొదటి కిరణాలు పడతాయి. గుడి ద్వారం నుండి విగ్రహానికి గల దూరం, సూర్యకిరణాలు వచ్చే ద్వారం పై నున్న రంధ్రం ఎత్తు మరియు ఆ నెలలో మొదటి సూర్యకిరణాలు భూమితో చేసే కోణానికి ఏదైనా సంబంధం ఉందను కొంటున్నారా? ఈ సందర్భంలో ఏదైనా త్రిభుజాన్ని ఊహించగలరా?

- ఆటలాడు స్థలంలో, పిల్లలు జారుడు బల్లపై జారుతూ ఉండడం గమనించి ఉంటారు. జారుడు బల్ల భూమి తో చేసే కోణాన్ని బట్టి జారుడు స్వభావం మారుతూ ఉంటుంది. జారుడు బల్ల భూమితో చేసేకోణం మారితే ఏం జరుగుతుంది? ఆ కోణం అసాధారణంగా ఉంటే పిల్లలు ఆడు కోగల్గుతారా ?






Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

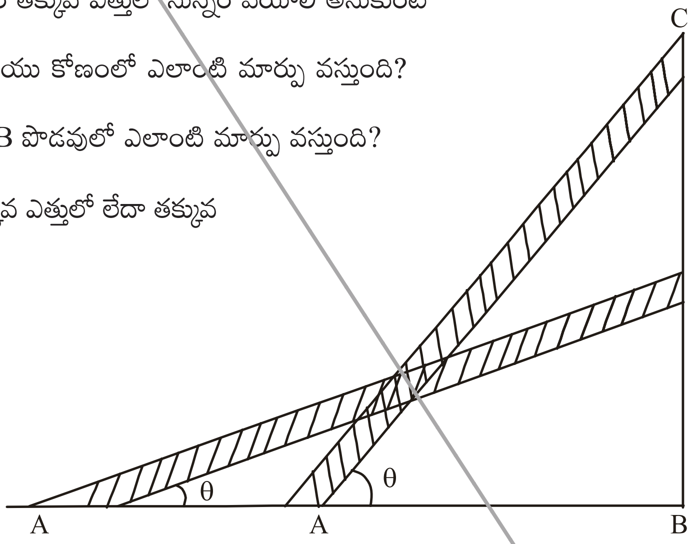


పై ఉదాహరణలు మనం నిత్యజీవితంలో జ్యామితిని ఏ విధంగా వినియోగించుకోవచ్చో తెలుపుతాయి. మరియు వివిధ కట్టడాల ఎత్తులు, దూరాలు మరియు వివిధ సందర్భాల్లో ఏర్పడే కోణాలు త్రిభుజ ధర్మాల ఆధారంగా కనుక్కోవచ్చు. ఈ రకాలైన సమస్యలను గణితంలో ఒక భాగమైన త్రికోణమితి ఆధారంగా సాధించవచ్చు.

ఇక గోడపై నిచ్చెన సహాయంతో సున్నం వేస్తున్న వ్యక్తి ఉదాహరణను గమనిద్దాం. క్రింది సందర్భాలను గమనిద్దాం.

నిచ్చెన యొక్క అడుగు భాగాన్ని Aతో మరియు పై భాగాన్ని Cతో సూచించామనుకోండి. గోడ యొక్క అడుగు భాగము, నిచ్చెన అడుగు భాగాన్ని కలిపే బిందువు B అనుకుందాం. ఈ విధంగా B వద్ద లంబకోణముతో ఒక లంబకోణ త్రిభుజం $\Delta ABC$ ఏర్పడుతుంది. ఇంకా, నిచ్చెన భూమితో చేస్తున్న కోణము "$\theta$" అనుకొనగా.

1. ఆ వ్యక్తి గోడపై ఇంకా కొంచెం ఎక్కువ ఎత్తులో సున్నం వేయాలి అనుకుంటే
   - నిచ్చెన భూమితో చేయు కోణంలో ఎలాంటి మార్పు వస్తుంది?
   - ఈ సందర్భంలో AB పొడవులో ఎలాంటి మార్పు వస్తుంది?
2. ఆ వ్యక్తి గోడపై ఇంకా కొంచెం తక్కువ ఎత్తులో సున్నం వేయాలి అనుకుంటే
   - నిచ్చెన భూమితో చేయు కోణంలో ఎలాంటి మార్పు వస్తుంది?
   - ఈ సందర్భంలో AB పొడవులో ఎలాంటి మార్పు వస్తుంది?




పై సందర్భాలలో గోడపై ఎక్కువ ఎత్తులో లేదా తక్కువ ఎత్తులో సున్న వేయాల్సి వస్తే ఆ నిచ్చెన యొక్క స్థితిని ఆ వ్యక్తి మార్చాల్సి వస్తుంది. ఒకవేళ '$\theta$' పెరిగినపుడు గోడపై సున్నం వేసే స్థానం ఎత్తు పెరిగి, భూమిపై దూరం AB తగ్గుతుందని గమనించాం కదా. ఇదేవిధంగా '$\theta$' తగ్గినపుడు గోడపై సున్నం వేసే స్థానం ఎత్తు తగ్గి, భూమిపై దూరం AB పెరుగుతుందని గమనిస్తాం. దీంతో మీరు ఏకీభవిస్తారా ?

ఇక్కడ ఏర్పడిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC లోని భుజాలను సాధారణంగానే పరిగణించాం. ఇక లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాలకు పేర్లను పెట్టి ఆ భుజాల నిష్పత్తులను గమనిద్దాం.

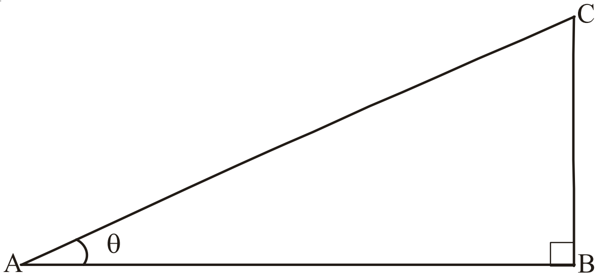


Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



### 11.1.1 లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాలు




ప్రక్కపటంలో చూపినట్టు లంబకోణ త్రిభుజం ABC ని తీసుకుందాం.

ప్రక్క పటంలో చూపినట్టు B వద్ద లంబకోణం కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజం ABCని తీసుకుందాం. ఈ త్రిభుజంలో ∠CAB ని ∠Aగా తీసుకుందాం. మరియు A ఒక అల్పకోణం. ఈ త్రిభుజంలో AC అనేది అతిపెద్ద భుజం కావున అది "కర్ణం" అవుతుంది.

ఈ త్రిభుజంలో భుజము BC స్థానము, ∠A పరంగా ఎలా వుంది. ∠A కు భుజము BC ఎదురుగా వుందని గమనించారు. కదా! కావున BCని ∠A యొక్క "ఎదుటి భుజము" అని అంటారు. ఇంకా మిగిలిన భుజము AB ని ∠ A యొక్క "ఆసన్న భుజము" అని అంటారు.

AC = కర్ణం

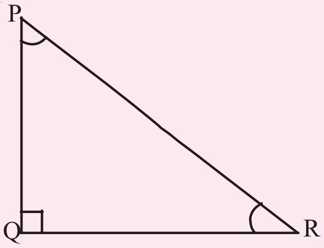
BC = ∠A యొక్క ఎదుటి భుజము

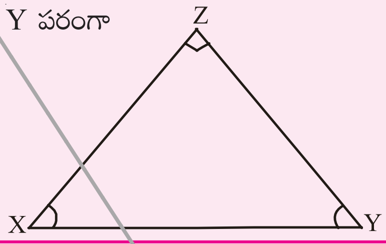
AB = ∠A యొక్క ఆసన్న భుజము

#### ఇది చేయండి

క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజాలలో ఇచ్చిన కోణాల ఆధారంగా "కర్ణం", ఎదుటి భుజము మరియు "ఆసన్న భుజము"లను గుర్తించి రాయండి.

1. కోణం R పరంగా
2. (i) కోణం X పరంగా
   (ii) కోణం Y పరంగా

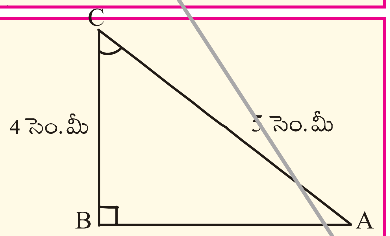


#### ప్రయత్నించండి

ఈ క్రింద ఇచ్చిన త్రిభుజంలో ఇచ్చిన కోణాల పరంగా "కర్ణం", "ఎదుటి భుజం", మరియు "ఆసన్న భుజం"లను కనుగొనండి.

1. కోణం C పరంగా
2. కోణం A పరంగా




మీరేం గమనించారు ? కోణం A యొక్క ఎదుటి భుజము మరియు కోణం C యొక్క ఆసన్న భుజానికి ఏమైనా సంబంధం ఉందా? ఇంకా, ఒక బలమైన లోహపు వైర్ ఆధారంగా ఒక స్థంభాన్ని నిలబెడుతున్నామనుకుందాం. స్థంభం ఎత్తు మరియు వైర్ పొడవుకు కు ఏదైనా సంబంధం ఉందనుకుంటున్నారా? ఇక్కడ మనం త్రిభుజంలోని భుజాల మధ్యన సంబంధాన్ని వాటి కోణాల ఆధారంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

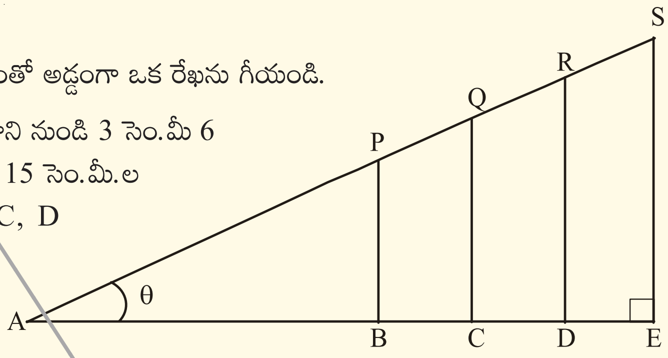


Downloaded from www.apteachers.in

## 11.2 త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

ఈ అధ్యాయం మొదట్లో మన నిత్య జీవితంలో ఎదురయ్యే సందర్భాలను గమనించాం. ఇక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు, అవి ఏవిధంగా నిర్వచింపబడ్డాయో చూద్దాం.

**కృత్యం**




1. మీ నోట్‌బుక్‌లో స్కేలు సహాయంతో అడ్డంగా ఒక రేఖను గీయండి.
2. మొదటి బిందువు A మరియు దాని నుండి 3 సెం.మీ 6 సెం.మీ, 9 సెం.మీ. మరియు 15 సెం.మీ.ల దూరాలలో వరుసగా B, C, D మరియు E. బిందువులను వరుసగా గుర్తించండి.
3. ఇంకా 4సెం.మీ, 8సెం.మీ, 12సెం.మీ మరియు 16సెం॥మీల పొడవులతో B, C, D మరియు E బిందువుల గుండా BP, CQ, DR, ES లంబాలను గీయండి.
4. AP, PQ, QR మరియు RS లను కలపండి.
5. AP, AQ, AR, ASల పొడవులను కనుగొనుము.

| కర్ణం పొడవు | ఎదుటి భుజం పొడవు | ఆసన్నభుజం పొడవు | $\frac{\text{ఎదుటిభుజం}}{\text{కర్ణం}}$ | $\frac{\text{ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

$\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ మరియు $\frac{ES}{AS}$ ల నిష్పత్తులను కనుగొనండి.

మీకు అన్నిటి ఫలితం $\frac{4}{5}$ వచ్చిందా?

ఇదేవిధంగా, $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ మరియు $\frac{AE}{AS}$ నిష్పత్తులను కనుగొనుము? ఏం గమనించారు?



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



## 11.2.1 త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను నిర్వచించడం

పై కృత్యంలో, లంబకోణ త్రిభుజాలు ABP, ACQ, ADR మరియు AES లలో కోణం A ఉమ్మడి కోణం. $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ మరియు $\angle E$లు లంబకోణాలు మరియు $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ మరియు $\angle S$ లు సమానంగా ఉంటాయి. కావునా, ABP, ACQ, ADR మరియు AES లు సరూప త్రిభుజాలు. ఈ త్రిభుజాలలోని ఒక త్రిభుజంలో $\angle A$ యొక్క ఎదుటి భుజము మరియు కర్ణాల నిష్పత్తి, మరియు మిగతా త్రిభుజములోని వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుందని గమనించాం కదా! ఈవిధంగా $\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ మరియు $\frac{ES}{AS}$ నిష్పత్తులను **"sine A"** లేదా ముక్తంగా **"sin A"** అనవచ్చు. ఒకవేళ $\angle A$ విలువ "$x$" అయితే దానిని "sin $x$" అని అనవచ్చు.

*ఈ విధంగా సరూపలంబకోణ త్రిభుజాల లోని లంబకోణం కాని ఒక కోణం యొక్క ఎదుటి భుజము మరియు కర్ణాల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుంది. మరియు ఆ నిష్పత్తిని ఆ కోణం యొక్క "sin" అంటారు.*

ఇదేవిధంగా $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ మరియు $\frac{AE}{AS}$ నిష్పత్తులు స్థిరంగా ఉంటాయి. ఇవి $\angle A$ యొక్క ఆసన్న భుజము మరియు కర్ణాల నిష్పత్తులు కావున ఈ నిష్పత్తులు $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ మరియు $\frac{AE}{AS}$ లను **"cosine A"** లేదా ముక్తంగా **"cos A"** అని అనవచ్చు. ఒకవేళ $\angle A$ విలువ "$x$" అయితే దానిని "cos $x$" అని అనవచ్చు.

*ఈవిధంగా "సరూపలంబకోణ త్రిబుజాలలోని లంబకోణం కాని ఒక కోణం యొక్క ఆసన్న భుజము మరియు కర్ణాల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుంది. మరియు ఆ నిష్పత్తిని ఆ కోణం యొక్క "cos" అంటారు.*

*ఇంకా సరూప లంబకోణ త్రిభుజాలలోని లంబకోణం కాని ఒక కోణం యొక్క ఎదుటి భుజము మరియు ఆసన్న భుజముల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుంది. మరియు ఆ నిష్పత్తిని ఆ కోణం యొక్క "tangent" అంటారు.*

### లంబకోణ త్రిభుజంలోని నిష్పత్తులు

పటంలో చూపినట్లు B వద్ద లంబకోణం కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC ను గమనించండి. అందులో $\angle A$ యొక్క త్రికోణమితి నిష్పత్తులు ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

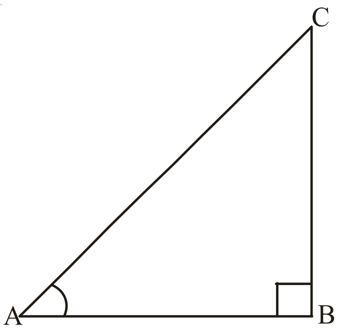


Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



$\angle A$ యొక్క sine = sinA = $\frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజపు పొడవు}}{\text{కర్ణం పొడవు}} = \frac{BC}{AC}$

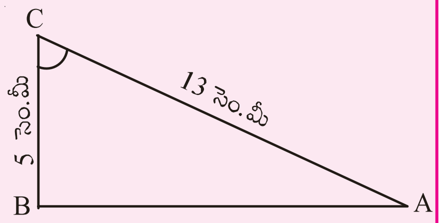



$\angle A$ యొక్క cosine = cos A = $\frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజపు పొడవు}}{\text{కర్ణం పొడవు}} = \frac{AB}{AC}$

$\angle A$ యొక్క tangent = tan A = $\frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజపు పొడవు}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజపు పొడవు}} = \frac{BC}{AB}$

## ఇవి చేయండి

1. పక్కనున్న లంబకోణత్రికోణంలో (i) sin C (ii) cos C మరియు (iii) tan C లను కనుగొనుము?




2. ఒక త్రిభుజము XYZలో, $\angle Y$ లంబకోణము మరియు XZ = 17 సెం.మీ. YZ = 15 సెం.మీ (i) sin X (ii) cos Z (iii) tan X లను కనుగొనుము?

3. త్రిభుజం PQR లో Q లంబకోణము మరియు $\angle P$ విలువ $x$ మరియు PQ = 7 సెం.మీ. మరియు QR = 24 సెం.మీ అయిన sin $x$ మరియు cos $x$ ల విలువలు కనుగొనుము.

## ప్రయత్నించండి

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంABC లో C లంబకోణం. BC + CA = 23 సెం.మీ. మరియు BC – CA = 7 సెం.మీ. అయినా sin A మరియు tan B లను కనుగొనుము.

## ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

(i) ఏదో ఒక విలువ $x$ కు $\sin x = \frac{4}{3}$ సాధ్యమా ? ఎందుకు?

(ii) sin A మరియు cos A ల విలువలు ఎల్లప్పుడు 1 కంటే తక్కువగా ఉంటాయి. ఎందుకు?

(iii) tan A అంటే tan మరియు A ల లబ్ధము.

పై ప్రశ్నలను మిత్రులతో చర్చించండి.



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



త్రికోణమితిలో ఇంతవరకు తెలుసుకొన్న నిష్పత్తుల గుణకార విలోమాలే కాక మూడు నిష్పత్తులున్నాయి.

"sine A" యొక్క గుణకార విలోమం "cosecant A" లేదా ముక్తంగా "cosec A"

i.e., $\text{cosec A} = \dfrac{1}{\sin A}$

ఇదే విధంగా "cos A" యొక్క గుణకార విలోమం "secant A" లేదా ముక్తంగా "sec A" మరియు "tan A" యొక్క గుణకార విలోమం "cotangent A" ముక్తంగా "cot A"

i.e., $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ మరియు $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

భుజాల పరంగా cosec నిష్పత్తిని ఏవిధంగా చెప్పవచ్చు ?

ఇంకా $\sin A = \dfrac{\text{కోణం A యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}}$ అయితే,

$\text{cosec A} = \dfrac{\text{కర్ణం}}{\text{కోణం A యొక్క ఎదుటి భుజం}}$

**ప్రయత్నించండి**

sec A మరియు cot A ల భుజాల నిష్పత్తులు ఏమౌతాయి?

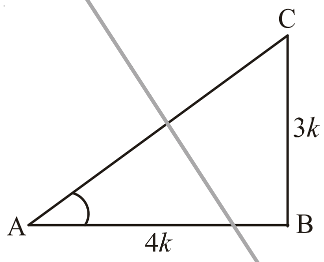
**ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.**

- $\dfrac{\sin A}{\cos A}$ విలువ tan A అగునా ?
- $\dfrac{\cos A}{\sin A}$ విలువ cot A అగునా?

మరికొన్ని ఉదాహరణలను గమనిద్దాం.

**ఉదాహరణ-1.** $\tan A = \dfrac{3}{4}$, అయిన కోణం A యొక్క మిగతా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను కనుక్కోండి.

**సాధన :** $\tan A = \dfrac{3}{4}$ అని ఇవ్వబడింది.




మరియు $\tan A = \dfrac{\text{ఎదుటి భుజం}}{\text{ఆసన్న భుజం}} = \dfrac{3}{4}$

కావున ఎదుటి భుజం : ఆసన్న భుజం = 3:4

కావున కోణం A ఎదుటి భుజం = BC = $3k$ ($k$ ఏదైన ధనపూర్ణ సంఖ్య)

ఆసన్నభుజం = AB = $4k$ అనుకొనగా



Downloaded from www.apteachers.in

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం త్రిభుజం ABC లో

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2$$

$$AC = \sqrt{25k^2}$$

కర్ణం $AC = 5k$

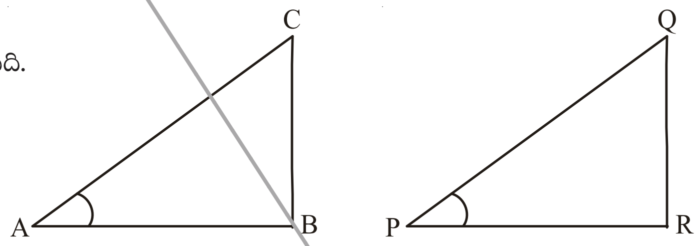
ఇక మనం మిగతా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను రాద్దాం.

$$\sin A = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5} \quad \text{మరియు} \quad \cos A = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

ఇంకా $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}$, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}$.

**ఉదాహరణ-2.** $\sin A = \sin P$ అయ్యేటట్లు $\angle A$ మరియు $\angle P$ లు లఘుకోణాలు అయిన $\angle A = \angle P$ అని చూపుము.

**సాధన :** $\sin A = \sin P$ అని ఇవ్వబడినది.




$\Delta ABC$ నుండి $\sin A = \frac{BC}{AC}$

$\Delta PQR$ నుండి $\sin P = \frac{QR}{PQ}$

అయితే (1) & (2) ల నుండి $\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ} = k$ అనుకొనిన

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$\frac{AB}{PR} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{\sqrt{PQ^2 - QR^2}} = \frac{AC}{PQ} = \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2}}\right) = \frac{AC}{PQ} \quad ((1) \text{ నుంచి})$$

$\frac{AC}{PQ} = \frac{AB}{PR} = \frac{BC}{QR}$ అయిన $\Delta ABC$ - $\Delta PQR$

$\therefore \angle A = \angle P$

**ఉదాహరణ-3.** P వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ త్రిభుజము PQRలో PQ = 29 యూనిట్లు, QR = 21 యూనిట్లు మరియు $\angle PQR = \theta$, అయిన

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ మరియు (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

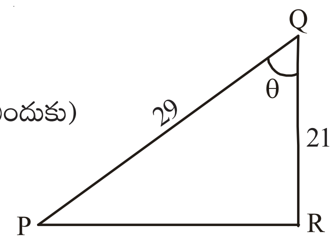


Downloaded from www.apteachers.in

**సాధన :** త్రిభుజం PQR లో

$$PR = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{8(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ యూనిట్లు.}$$ (ఎందుకు)




$$\sin\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$$

ఇక (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{441+400}{841} = 1$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 - \left(\frac{21}{29}\right)^2 = -\frac{41}{841}$

## అభ్యాసం - 11.1

1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో భుజాలు AB, BC మరియు CA ల పొడవులు వరుసగా 8 సెం.మీ, 15 సెం.మీ మరియు 17 సెం.మీ అయిన sin A, cos A మరియు tan A ల విలువలు కనుగొనుము.
2. లంబకోణ త్రిభుజం PQR యొక్క భుజాలు PQ = 7 సెం.మీ, QR = 25సెం.మీ మరియు $\angle Q = 90^0$ అయిన tan Q − tan R కనుగొనుము.
3. B వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో $a = 24$ యూనిట్లు, $b = 25$ యూనిట్లు మరియు $\angle BAC = \theta$ అయిన cos θ మరియు tan θల విలువలు కనుగొనుము.
4. $\cos A = \frac{12}{13}$ అయిన sin A మరియు tan A ల విలువలను కనుగొనుము.
5. 3 tan A = 4 అయిన sin A, మరియు cos A ల విలువలను కనుగొనుము.
6. cos A = cos X అయ్యేటట్లు ∠A మరియు ∠X లు లఘుకోణాలయిన ∠A = ∠X అని చూపుము.
7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ అయిన (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ లను కనుగొనుము.
8. B వద్ద లంబకోణం కల్గిన త్రిభుజం ABCలో $\tan A = \sqrt{3}$ అయిన

   (i) sin A cos C + cos A sin C (ii) cos A cos C − sin A sin C

   ల విలువలను కనుగొనుము.



Downloaded from www.apteachers.in

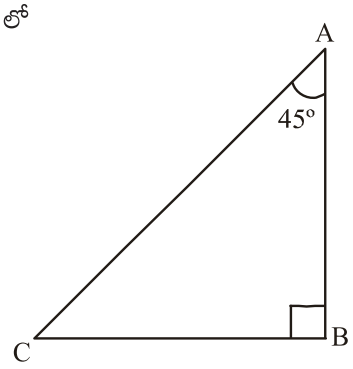
## 11.3 ప్రత్యేక కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

మనకు ఇదివరకే లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం మరియు $30^o, 60^o, 90^o$ కోణాలు కల్గిన త్రిభుజాల గురించి తెలుసు.

మనము $\sin 30^o$ లేదా $\tan 60^o$ లేదా $\cos 45^o$ మొ॥న వాటిని పై త్రిభుజాల ఆధారంగా కనుక్కోవచ్చా?

$\sin 0^o$ లేదా $\cos 0^o$ లు వ్యవస్థితమౌతాయా ?

### 11.3.1 కోణం 45° యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు




B వద్ద లంబకోణం కల్గిన లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో

$\angle A = \angle C = 45^o$ (ఎందుకు ?) and $BC = AB$ (ఎందుకు ?)

$BC = AB = a$ అనుకొనుము.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= a^2 + a^2 = 2a^2,$$

$$AC = a\sqrt{2}$$

త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తుల నిర్వచనాల ప్రకారం

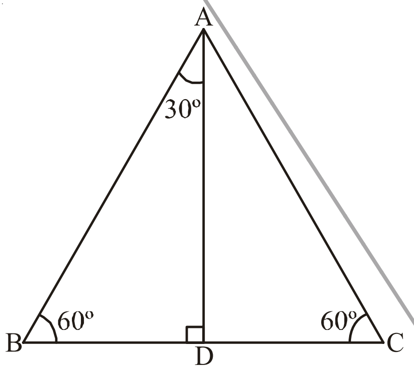
$$\sin 45^o = \frac{45^0 \text{ కోణం యొక్క ఎదుటి భుజం పొడవు}}{\text{కర్ణం}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^o = \frac{45^0 \text{ కోణం ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{45^0 \text{ కోణం ఎదుటి భుజం}}{45^0 \text{ కోణం ఆసన్న భుజం}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$$

ఇదేవిధంగా $\text{cosec } 45^o$, $\sec 45^o$ మరియు $\cot 45^o$.

### 11.3.2 కోణాలు 30° మరియు 60°ల త్రికోణమితీయనిష్పత్తులు




ఇక మనం $30^o$ మరియు $60^o$ కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను కనుక్కొందాం! వాటిని కనుక్కోడానికి ఒక సమబాహు త్రిభుజ సహాయాన్ని తీసుకుందాం. ఒక సమబాహుత్రిభుజంలో ఒక భుజంపై గీసిన లంబం, దానిని $30^o$, $60^o$ మరియు $90^o$ కోణాలు కలిగిన రెండు సర్వసమాన లంబకోణ త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



ఒక సమబాహుత్రిభుజం $\Delta ABC$ ని తీసుకోండి. ఇందులో ప్రతి కోణం $60^o$ ఉంటుంది. కావున $\angle A = \angle B = \angle C = 60^o$ మరియు $AB = BC = CA = 2a$ యూనిట్లు అనుకోండి. శీర్షం A నుండి భుజం BC పైకి ఒక లంబం AD ను ప్రక్క పటంలో చూపినట్లు గీయండి.

ఈ లంబం AD, కోణం A యొక్క "కోణ సమద్విఖండన రేఖ"గా మరియు భుజం BC యొక్క "సమద్విఖండన రేఖ"గా కూడా పనిచేస్తుంది.

$\therefore\ \angle BAD = \angle CAD = 30^o$.

BC ను D బిందువు రెండు సమాన భాగాలుగా చేస్తుంది, కావున

$BD = \frac{1}{2}BC = \frac{2a}{2} = a$ యూనిట్లు.

ప్రక్కపటంలో లంబకోణ త్రిభుజం ABD లో

$AB = 2a$ మరియు $BD = a$ యూనిట్లు

అప్పుడు $AD^2 = AB^2 - BD^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$= (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$.

$\therefore\ AD = a\sqrt{3}$

ఇక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల నిర్వచనాల ఆధారంగా

$$\sin 60^o = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

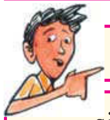
$$\cos 60^o = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

ఇదే విధంగా $\tan 60^o = \sqrt{3}$ (ఎందుకు?)

పైన చెప్పిన దాని ఆధారంగా, మనం $\text{cosec } 60^o$, $\sec 60^o$ మరియు $\cot 60^o$ ల విలువలను కూడా చెప్పవచ్చు.

**ఇవి చేయండి**

$\text{cosec } 60^o$, $\sec 30^o$ మరియు $\cot 60^o$ ల విలువలు కనుగొనండి.



**ప్రయత్నించండి**

$\sin 30^o$, $\cos 30^o$, $\tan 30^o$, $\text{cosec } 30^o$, $\sec 30^o$ మరియు $\cot 30^o$ విలువలను కనుక్కోండి.

### 11.3.3 కోణాలు 0° మరియు 90° ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

ఇంతవరకు మనం $30^o$, $45^o$ మరియు $60^o$ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను గురించి చర్చించాం. ఇక మనం $0^o$ మరియు $90^o$ ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను కనుక్కొందాం.

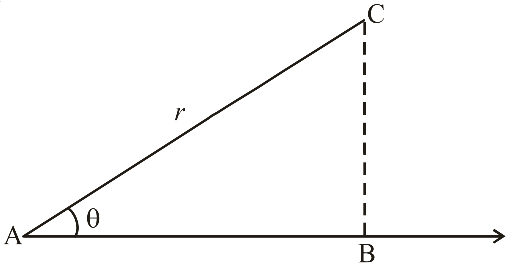


Downloaded from www.apteachers.in

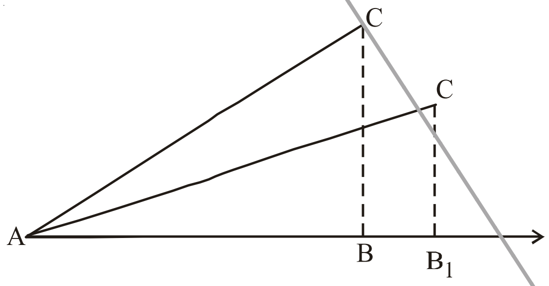
www.apteachers.in



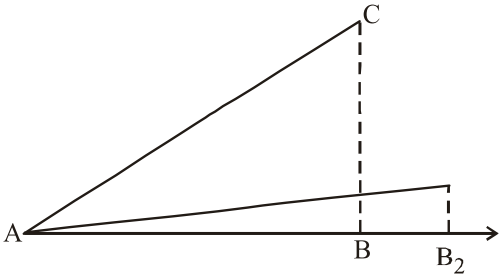
AB కిరణంపై r పొడవు కల్గిన AC రేఖాఖండం అల్పకోణం చేస్తుందనుకొనుము. బిందువు B నుండి C బిందువు యొక్క ఎత్తు BC. AB పై AC చేసే కోణం ఇంకా కొంచెం తగ్గేటట్లు AB పైకి AC వాలిందనుకొనుము అపుడు BC మరియు AB ల పొడవులలో ఏం మార్పు వస్తుంది.




ఈ విధంగా కోణం A తగ్గుతూ పోతుంటే, AB కిరణంపై C ఎత్తు తగ్గుతూ, బిందువు B నుండి $B_1$కు ఆ తర్వాత $B_2$ కు మారుతూ ఉంటుంది.. ఇలా ఆ కోణం సున్నా అయినపుడు ఎత్తు (i.e. కోణం యొక్క ఎదుటి భుజం) సున్న అవుతుంది మరియు ఆసన్నభుజం AC లో కలిసిపోతుంది (సమానమవుతుంది).




Step (i)




Step (ii)

ఇక త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తుల విలువలను చూద్దాం.

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \quad \text{మరియు} \quad \cos A = \frac{AB}{AC}$$

$A = 0^o$ అయితే $BC = 0$ మరియు $AC = AB = r$

ఇక $\sin 0^o = \frac{0}{r} = 0$ మరియు $\cos 0^o = \frac{r}{r} = 1$

మనకు $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ అని తెలుసు

$$\tan 0^o = \frac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \frac{0}{1} = 0$$

## ఆలోచించి చర్చించి రాయండి

ఈ క్రింది వాటిని మీ స్నేహితులలో చర్చించండి.

1. $\text{cosec } 0^o = \frac{1}{\sin 0^o}$ ఇది నిర్వచింపబడుతుందా? ఎందుకు ?



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

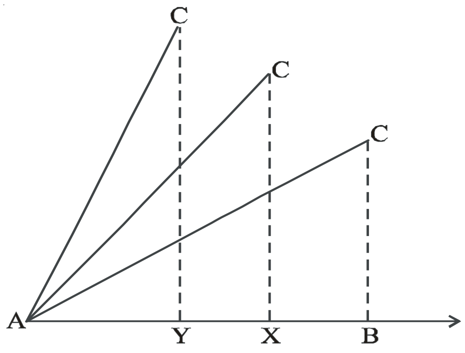


2. $\cot 0^o = \frac{1}{\tan 0^o}$ నిర్వచింపబడుతుందా? ఎందుకు?

3. $\sec 0^o = 1$. ఎందుకు ?

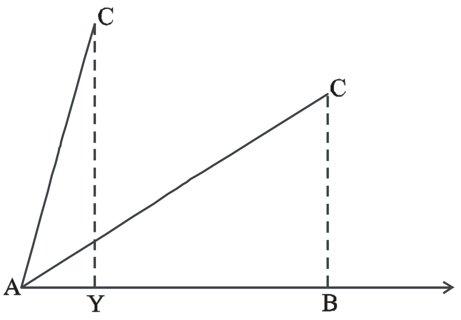
ఇంతవరకు మనం కోణాన్ని తగ్గించి సున్న కోణం త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను చర్చించాం.

ఇక మనం AB కిరణంపై AC చేసే AB కోణాన్ని పెంచుతూ పోతే, AB పై C ఎత్తు పెరుగుతూ, బిందువు B నుండి Xకు ఆ తర్వాత Yకు మారుతూ పోతుంది. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే కోణం A పెరుగుతూ పోతుంటే ఎదుటి భుజం పెరుగుతూ, ఆసన్న భుజం తగ్గుతూ ఉంటుంది. ఒక సమయానికి కోణం విలువ $90^o$ లకు చేరితే ఏం జరుగుతుంది?

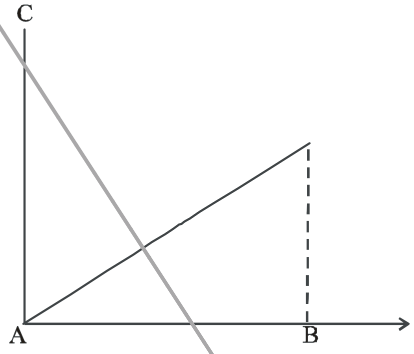


Step (i)

ఆ సందర్భంలో A కు B చేరుతుంది. AC కు BC కలిసిపోతుంది. అనగా కోణం విలువ $90^o$ అయినప్పుడు భూమి (ఆసన్నభుజం) విలువ సున్న అయి, BC (ఎదుటి భుజం) విలువ క్రమంగా పెరుగుతూ AC కు సమానమౌతుంది. అనగా rకు సమానమౌతుంది.



Step (ii)



Step (iii)

ఇక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను కనుగొందాం.

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \text{ మరియు } \cos A = \frac{AB}{AC}$$

కోణం $A = 90^o$ అయిన $AB = 0$ మరియు $AC = BC = r$

అపుడు $\sin 90^o = \frac{r}{r} = 1$ మరియు $\cos 90^o = \frac{0}{r} = 0$

**ప్రయత్నించండి**

$\tan 90^o$, $\text{cosec } 90^o$, $\sec 90^o$ మరియు $\cot 90^o$ విలువలను కనుగొనండి.



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



ఇక మనం, పైన చర్చించిన కోణాలన్నింటి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను ఒక పట్టిక రూపంలో చూద్దాం.

**Table 11.1**

| $\angle A$ | $0^o$ | $30^o$ | $45^o$ | $60^o$ | $90^o$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin A | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos A | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan A | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | నిర్వచించబడదు |
| cot A | నిర్వచించబడదు | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| sec A | 1 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | నిర్వచించబడదు |
| cosec A | నిర్వచించబడదు | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1 |

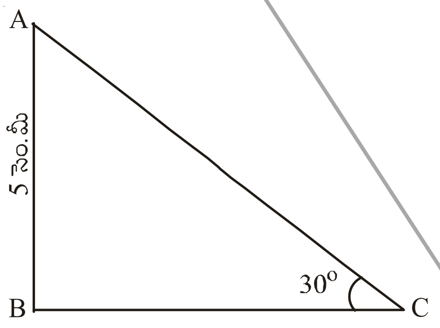
**ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.**

కోణం A విలువ $0^0$ నుండి $90^0$ కు పెరుగుతూ పోతుంటే sin A మరియు cos A విలువలు ఎలా మారుతూ ఉంటాయి? (పై పట్టికను గమనించండి)

$A \geq B$ అయిన $\sin A \geq \sin B$ అనడం సబబేనా ?

$A \geq B$ అయిన $\cos A \geq \cos B$ అనడం సబబేనా ? చర్చించండి.

**ఉదాహరణ-4.** B వద్ద లంబకోణం కల్గిన $\Delta ABC$ లో $AB = 5$ సెం.మీ మరియు $\angle ACB = 30^o$ అయిన BC మరియు AC భుజాల పొడవులను కనుగొనండి.




**సాధన :** $\angle ACB = 30^0$ మరియు AB = 5 సెం.మీ అని ఇవ్వబడింది. BCభుజం పొడవును కనుగొనాలంటే కోణం C పరంగా AB మరియు BC కి సంబంధించిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని తీసుకోవాలి. కోణం C కు BC కి సంబంధించిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని తీసుకోవాలి. కోణం C కు BC అనేది ఆసన్న భుజం మరియు AB అనేది ఎదుటి భుజం అవుతాయి.

కావున $\frac{AB}{BC} = \tan C$

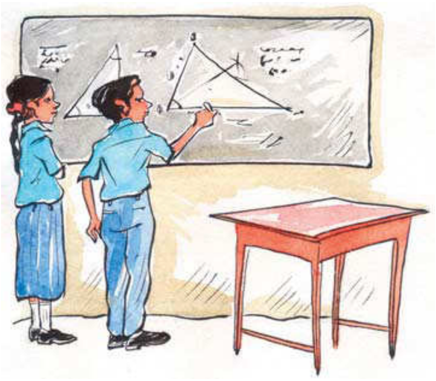


Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



i.e. $\frac{5}{BC} = \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$



ఈ విధంగా $BC = 5\sqrt{3}$ సెం.మీ

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2$$

$$AC^2 = 25 + 75$$

$$AC = \sqrt{100} = 10 \text{ సెం.మీ}$$

**ఉదాహరణ-5.** 6 సెం.మీ వ్యాసార్థం కలిగిన వృత్తంలో ఒక జ్యా కేంద్రం వద్ద $60^o$ కోణం చేస్తుంది. ఆ జ్యా పొడవును కనుగొనండి.

**సాధన :** $OA = OB = 6$ సెం.మీ వ్యాసార్థం

$\angle AOB = 60^o$ ఇవ్వబడినది

AB పైకి 'O' నుండి OC ఎత్తు గీయబడింది అనుకొనుము.

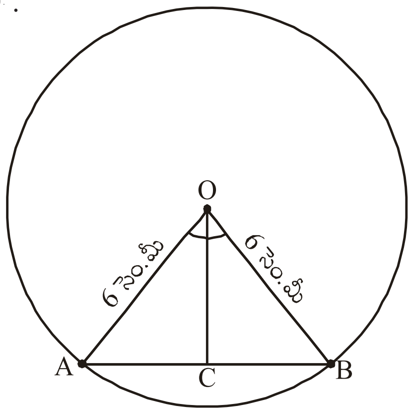
$\angle COB = 30^o$.

$\Delta COB$ లో

$\sin 30^o = \frac{BC}{OB}$

$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$

$BC = \frac{6}{2} = 3$.




కాని, జ్యా పొడవు $AB = 2BC$

$= 2 \times 3 = 6$ సెం.మీ

$\therefore$ జ్యా పొడవు = 6 సెం.మీ

ఈ రోజుల్లో మనం ఉపయోగించే **'sine'** అనే భావన యొక్క ఉపయోగం మొట్ట మొదటగా 500A.D. లో ఆర్యభట్ట ద్వారా రాయబడిన "ఆర్య భట్టీయం"లో కనిపిస్తుంది. అందులో దీనిని "అర్థ-జ్యా"గా వాడబడింది. తర్వాత అది "జ్యా"గా లేదా "జీవా"గా కాలక్రమేణా మారింది. అరబిక్ భాషలో అనువదింపబడిన ఆర్యభట్టీయంలో "జీవా" యొక్క ప్రయోగం కనిపిస్తుంది. తర్వాత లాటిన్ భాషలో అనువదింపబడిన "ఆర్యభట్టీయం"లో "జీవా"ను "***sinus* (సైన్)**" గా మారింది. ఆంగ్ల ఖగోళ శాస్త్ర ఆచార్యుడు ఎడ్మండ్ గుంటర్ (1581–1626) మొట్టమొదటగా ***'sine'*** ను సూక్ష్మంగా ***'sin'*** గా ఉపయోగించాడు.



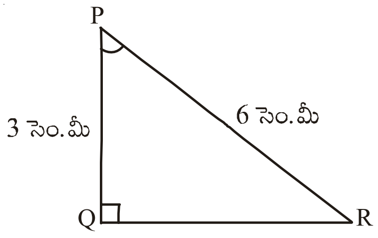
Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



**ఉదాహరణ-6.** Q వద్ద లంబకోణం ఉన్న $\Delta PRQ$ లో $PQ = 3$ సెం.మీ మరియు $PR = 6$ సెం.మీ అయిన $\angle QPR$ మరియు $\angle PRQ$.

**సాధన :** $PQ = 3$ సెం.మీ మరియు $PR = 6$ సెం.మీ




$$\frac{PQ}{PR} = \sin R$$

లేదా $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle PRQ = 30^o$

ఇంకా, $\angle QPR = 60^o$ (ఎందుకు?)

**గమనిక :** ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక భుజం మరియు ఇంకొక కొలత (మరొక భుజం లేదా కోణం) ఇచ్చిన మిగిలిన భుజాలు, కోణాలను కనుక్కోవచ్చు.

**ఉదాహరణ-7.** $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^o < A+B \leq 90^o, A > B$ అయిన A మరియు B విలువలు కనుక్కోండి.

**సాధన :** $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $A - B = 30^o$ (ఎందుకు ?)

ఇంకా, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, అయిన $A + B = 60^o$ (ఎలా ?)

పై రెండు సమీకరణాల నుండి : $A = 45^o$ మరియు $B = 15^o$. (ఎలా ?)

## అభ్యాసం - 11.2

1. క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనండి. క్రింది వాటిని గణించండి.

   (i) $\sin 45^o + \cos 45^o$  (ii) $\frac{\cos 45^o}{\sec 30^o + \operatorname{cosec} 60^o}$

   (iii) $\frac{\sin 30^o + \tan 45^o - \operatorname{cosec} 60^o}{\cot 45^o + \cos 60^o - \sec 30^o}$  (iv) $2\tan^2 45^o + \cos^2 30^o - \sin^2 60^o$

   (v) $\frac{\sec^2 60^o - \tan^2 60^o}{\sin^2 30^o + \cos^2 30^o}$

2. సరైన సమాధానాన్ని ఎంచుకొని, గుర్తించండి.

   (i) $\frac{2\tan 30^o}{1+\tan^2 45^o}$

   (a) $\sin 60^o$  (b) $\cos 60^o$  (c) $\tan 30^o$  (d) $\sin 30^o$



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



(ii) $\frac{1-\tan^2 45^o}{1+\tan^2 45^o}$

(a) $\tan 90^o$ (b) 1 (c) $\sin 45^o$ (d) 0

(iii) $\frac{2\tan 30^o}{1-\tan^2 30^o}$

(a) $\cos 60^o$ (b) $\sin 60^o$ (c) $\tan 60^o$ (d) $\sin 30^o$

3. $\sin 60^o \cos 30^o + \sin 30^o \cos 60^o$ విలువ గణించండి. $\sin(60^o+30^o)$ విలువ ఎంత? దీని నుండి మీరేం గ్రహించారు.

4. $\cos(60^o+30^o) = \cos 60^o \cos 30^o - \sin 60^o \sin 30^o$ అనడం సబబేనా?

5. Q వద్ద లంబకోణం కల్గిన $\Delta PQR$ లో PQ = 6సెం.మీ $\angle RPQ = 60^o$ అయిన QR మరియు PR విలువలను కనుక్కోండి.

6. Y వద్ద లంబకోణం కల్గిన $\Delta XYZ$ లో $YZ = x$ మరియు $XY = 2x$ అయిన $\angle YXZ$ మరియు $\angle YZX$ ల విలువలను నిర్ణయించుము.

7. $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ అనడం సబబేనా ? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించుము.

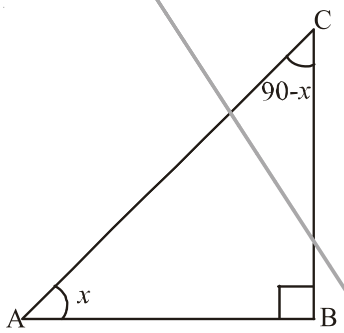
**ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.**

$\theta$ యొక్క ఏ లఘుకోణ విలువకు (i) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=4$ సత్యమౌతుంది?

పై సమీకరణం $0^o \le \theta \le 90^o$ లలో ఏ విలువలకు నిర్వచించబడదు?

## 11.4 పూరక కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మధ్య సంబంధం

రెండు కోణాల మొత్తం $90^o$ అయిన ఆ కోణాలను పూరక కోణాలు అంటారని తెలుసు కదా! B వద్ద లంబకోణం కల్గిన ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABC ను తీసుకొండి. ఈ త్రిభుజంలో ఏవైనా పూరక కోణాలున్నాయా? ఒక కోణం విలువ $90^0$ కావున, మిగిలిన కోణాల మొత్తం $90^0$ అవుతుంది కదా! (ఎందుకు?)




$\therefore \angle A + \angle C = 90^o$ కావున $\angle A$ మరియు $\angle C$ లను పూరక కోణాలు అంటాం.

$\angle A = x$ అనుకొనుము. అపుడు $x$ యొక్క "ఎదుటిభుజం", BC మరియు AB 'ఆసన్నభుజం' అవుతాయి.



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



$\sin x = \frac{BC}{AC}$ $\cos x = \frac{AB}{AC}$ $\tan x = \frac{BC}{AB}$

$\operatorname{cosec} x = \frac{AC}{BC}$ $\sec x = \frac{AC}{AB}$ $\cot x = \frac{AB}{BC}$

$\angle A + \angle C = 90^o$ కావున $\angle C = 90^o - \angle A$

ఇంకా $\angle A = x$ అయితే $\angle C = 90^o - x$

$\angle C$ పరంగా $(90^o - x)$ యొక్క ఎదుటి భుజం AB మరియు ఆసన్నభుజం BC అవుతాయి.

$\sin(90^o - x) = \frac{AB}{AC}$ $\cos(90^o - x) = \frac{BC}{AC}$ $\tan(90^o - x) = \frac{AB}{BC}$

$\operatorname{Cosec}(90^o - x) = \frac{AC}{AB}$ $\sec(90^o - x) = \frac{AC}{BC}$ $\cot(90^o - x) = \frac{BC}{AB}$

ఇక $x^o$ మరియు $(90^o - x)$ కోణాలపై త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను పరిశీలించి, పోల్చగా

$\sin(90^o - x) = \frac{AB}{AC} = \cos x$ మరియు $\cos(90^o - x) = \frac{BC}{AC} = \sin x$

$\tan(90^o - x) = \frac{AB}{BC} = \cot x$ మరియు $\cot(90^o - x) = \frac{BC}{AB} = \tan x$

$\operatorname{cosec}(90^o - x) = \frac{AC}{AB} = \sec x$ మరియు $\sec(90^o - x) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} x$

**ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.**

A యొక్క $0^o \le A \le 90^0$ యొక్క తెలిసిన అన్ని విలువలకు కింది సూత్రాలు సమంజసమేనా? సరిచూడండి.

$\sin(90^o - A) = \cos A$ $\cos(90^o - A) = \sin A$

$\tan(90^o - A) = \cot A$ మరియు $\cot(90^o - A) = \tan A$

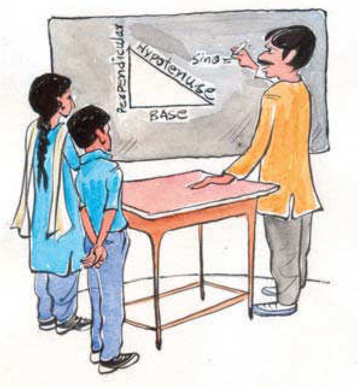
$\sec(90^o - A) = \operatorname{cosec} A$ $\operatorname{cosec}(90^o - A) = \sec A$



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in






ఇంకా కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

**ఉదాహరణ-8.** $\dfrac{\sec 35^o}{\text{cosec}\, 55^o}$ ను గణించుము.

**సాధన :** $\text{cosec}\, A = \sec\,(90^o - A)$

$\text{cosec}\, 55^o = \sec\,(90^o - 35^o)$

$\text{cosec}\, 55^o = \sec\, 35^o$

ఇక $\dfrac{\sec 35^o}{\text{cosec}\, 65^o} = \dfrac{\sec 35^o}{\sec 35^o} = 1$

**ఉదాహరణ-9.** $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$ ఇంకా $7A$ అల్పకోణం అయిన $A$ విలువ ఎంత?

**సాధన :** $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$ అని ఇవ్వబడింది ...(1)

$\sin\,(90 - 7A) = \sin\,(A - 6^o)$

$7A$ లఘుకోణం కావున $(90^0 - 7A)$ మరియు $(A - 6^o)$ లు కూడా లఘుకోణాలవుతాయి.

$90^o - 7A = A - 6^o$

$8A = 96^o$

$A = 12^o$.

**ఉదాహరణ-10.** $\sin A = \cos B$ అయిన $A + B = 90^o$ అని చూపుము.

**సాధన :** $\sin A = \cos B$ అని ఇవ్వబడింది ...(1)

$\cos B = \sin\,(90^o - B)$ అని తెలుసు

కావున $\sin A = \sin\,(90^o - B)$

A, B లఘుకోణాలు అయిన $A = 90^o - B$

$\Rightarrow A + B = 90^o$.

**ఉదాహరణ-11.** $\sin 81^o + \tan 81^o$ విలువను $0^o$ మరియు $45^o$ మధ్యత్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో చూపుము.

**సాధన :** $\sin 81^o = \cos(90^o - 81^o) = \cos 9^o$

$\tan 81^o = \tan(90^o - 81^o) = \cot 9^o$

అయిన, $\sin 81^o + \tan 81^o = \cos 9^o + \cot 9^o$



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



**ఉదాహరణ-12.** త్రిభుజం లోని ABC లోని అంతర కోణాలు A, B మరియు C లు అయిన

$$\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$$

**సాధన :** A, B మరియు C లు $\Delta ABC$ లోని కోణాలు కావున

$A + B + C = 180^o$.

ఇరువైపుల 2 చే భాగించగా

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^o$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^o - \frac{A}{2}$$

ఇరువైపుల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి sin తీసుకొనగా

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^o - \frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$ ; నిరూపించబడింది.

## అభ్యాసం 11.3

1. విలువ కనుక్కోండి.

   (i) $\frac{\tan 36^o}{\cot 54^o}$ (ii) $\cos 12^o - \sin 78^o$ (iii) $\text{cosec } 31^o - \sec 59^o$

   (iv) $\sin 15^o \sec 75^o$ (vi) $\tan 26^o \tan 64^o$

2. నిరూపించండి.

   (i) $\tan 48^o \tan 16^o \tan 42^o \tan 74^o = 1$

   (ii) $\cos 36^o \cos 54^o - \sin 36^0 \sin 54^o = 0$.

3. $\tan 2A = \cot(A - 18^o)$, 2A లఘుకోణం అయిన A విలువ కనుక్కోండి.

4. A, B లు లఘుకోణాలు మరియు $\tan A = \cot B$ అయిన $A + B = 90^o$.

5. A, B మరియు C లు $\Delta ABC$ లోని అంతర కోణాలయిన $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$

6. $\sin 75^o + \cos 65^o$ ను $0^o$ మరియు $45^o$ మధ్యగల విలువల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో తెల్పుము.



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



## 11.5 త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు

చరరాశుల అన్ని విలువలకు ఒక గణిత సమీకరణము సత్యమైతే ఆసమీకరణాన్ని సర్వసమీకరణం అంటారు.

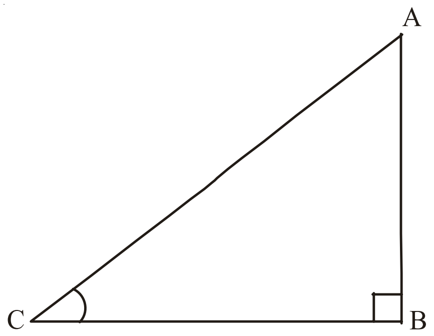
ఉదాహరణకు $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

ఇదే విధంగా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ఆధారంగా ఏర్పడిన సర్వసమీకరణాన్ని త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణం అంటారు. ఇంకా ఈ సర్వసమీకరణం త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల అన్ని కోణాలకు సత్యం అవుతుంది. ఇక్కడ, మనము త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలను ఉత్పాదిద్దాం!

B వద్ద లంబకోణం కలిగిన త్రిభుజం ABC లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$\therefore \quad AB^2 + BC^2 = AC^2$ ....(1)

ఇరువైపుల $AC^2$ చే భాగించగా




$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\left[\frac{AB}{AC}\right]^2 + \left[\frac{BC}{AC}\right]^2 = \left[\frac{AC}{AC}\right]^2$$

$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

మనం సాధారణంగా $(\cos A)^2$కు బదులుగా $\cos^2 A$ గా రాస్తాం. కాని $\cos A^2$ గా రాయం.

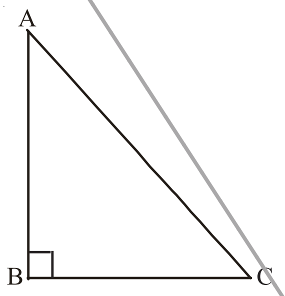
$(\cos A)^2 = \cos^2 A$ ($\cos A^2$ గా రాయకూడదు)

కావున సర్వసమీకరణం $\boxed{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$

పై సమీకరణంలో కోణం A ను చరరాశిగా పరిగణిస్తాం. ఇంకా ఈ సమీకరణం A యొక్క అన్ని విలువలకు సత్యం అవుతుంది.

$\therefore$ కావలసిన త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణం

$\boxed{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$




మనం ఇంకొక సర్వసమీకరణాన్ని చూద్దాం.

సమీకరణం (1) నుండి

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

ఇరువైపుల $AB^2$ చే భాగించగా

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\therefore \ \mathbf{1 + tan^2 A = sec^2 A}$$

ఇదేవిధంగా సమీకరణం(1) ని ఇరువైపుల $BC^2$ చే భాగించగా $\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$ వస్తుంది.

పై సర్వ సమీకరణాలను ఉపయోగించి, మనం ఒక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని మరొక త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిలో సూచించవచ్చు. ఇంకా మనం ఒక కోణం యొక్క నిష్పత్తి తెలిస్తే మిగిలిన నిష్పత్తులను కూడ కనుక్కోవచ్చు.

### ఆలోచించి చర్చించి వ్రాయండి.

$0^0 \le A \le 90^0$ అన్ని విలువలకు త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు సత్యమేనా?

- $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
- $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

### ఇవి చేయండి

(i) $\sin C = \frac{15}{17}$, అయిన $\cos A$ విలువ కనుగొనుము.

(ii) $\tan x = \frac{5}{12}$, అయిన $\sec x$ విలువ కనుగొనుము.

(iii) $\text{cosec}\,\theta = \frac{25}{7}$, అయిన $\cot x$ విలువను కనుగొనుము.

### ప్రయత్నించండి

క్రింది వాటి విలువలను సకారణంగా కనుగొనుము

(i) $\dfrac{\sin^2 15^o + \sin^2 75^o}{\cos^2 36^o + \cos^2 54^o}$

(ii) $\sin 5^o \cos 85^o + \cos 5^o \sin 85^o$

(iii) $\sec 16^o \ \text{cosec}\ 74^o - \cot 74^o \tan 16^o$.

**ఉదాహరణ-13.** $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta\ \text{cosec}\,\theta$ నిరూపించండి.

**సాధన :** $LHS = \cot\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{(ఎందుకు ?)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\ \cos\theta}$$



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



$$= \frac{1}{\sin\theta \ \cos\theta} \qquad \text{(ఎందుకు ?)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \ \frac{1}{\cos\theta} = \text{cosec}\theta \ \sec\theta$$

**ఉదాహరణ-14.** $\tan^2\theta + \tan^4\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$ నిరూపించండి

**సాధన :** L.H.S. $= \tan^2\theta + \tan^4\theta$

$= \tan^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

$= \tan^2\theta \,.\, \sec^2\theta$ (ఎందుకు ?)

$= (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta$ (ఎందుకు ?)

$= \sec^4\theta - \sec^2\theta =$ R.H.S

**ఉదాహరణ-15.** $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$ నిరూపించండి.

**సాధన :** LHS $= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ (1 + cos θ చే గుణించి భాగించగా)

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad \text{(ఎందుకు ?)}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \text{cosec}\theta + \cot\theta = \text{R.H.S.}$$

## అభ్యాసం 11.4

1. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి :

(i) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta)$

(ii) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

(iii) $(\sec^2\theta - 1)(\text{cosec}^2\theta - 1)$



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



2. $(\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ అని చూపించండి ?

3. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ చూపండి?

4. $\dfrac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A - 1} = \tan^2 A$ చూపండి ?

5. $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta . \sin\theta$ చూపండి?

6. secA (1 – sinA) (secA + tanA) సూక్ష్మీకరించండి.

7. $(\sin A + \text{cosec}\ A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$ అని నిరూపించండి?

8. $(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)(1 + \cot^2\theta)$ సూక్ష్మీకరించండి?

9. $\sec\theta + \tan\theta = p$ ఐతే $\sec\theta - \tan\theta$ విలువ ఎంత?

10. $\text{cosec}\theta + \cot\theta = k$ ఐతే $\cos\theta = \dfrac{k^2-1}{k^2+1}$ విలువ ఎంత?

## ఐచ్ఛిక అభ్యాసం

[ఈ అభ్యాసం పరీక్షలలో పరీక్షించడానికి ఉద్దేశించినది కాదు]

1. $\dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \dfrac{\text{cosec}\theta - 1}{\text{cosec}\theta + 1}$ నిరూపించండి.

2. $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ నిరూపించండి

($\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి).

3. $(\text{cosec}\ A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$ అని నిరూపించండి.

4. $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ అని నిరూపించండి.

5. $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1+\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$ అని చూపండి.

6. $\left[\dfrac{(\sec A - 1)}{(\sec A + 1)}\right] = \left[\dfrac{(1-\cos A)}{(1+\cos A)}\right]$ అని నిరూపించండి.



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

## మనం ఏమి చర్చించాం

1. B వద్ద లంబ కోణం కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో

$\sin A = \frac{\text{కోణం A నకు ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}}$ , $\cos A = \frac{\text{కోణం A నకు ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}}$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$; $\sec A = \frac{1}{\cos A}$; $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\tan A = \frac{1}{\cot A}$

3. ఒక లఘుకోణం యొక్క ఒక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి విలువ తెలిస్తే మిగతా నిష్పత్తులను కూడ కనుక్కోవచ్చు.

4. $0^o, 30^o, 45^o, 60^o$ మరియు $90^o$ ల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు.

5. sin A లేదా cos A ల విలువలు ఎప్పటికి 1 కంటే తక్కువగాను లేదా సమానంగా ఉంటాయి. కాని sec A లేదా cosec A ల విలువలు ఎప్పటికి 1 కంటే ఎక్కువగాను లేదా సమానంగాను ఉంటాయి.

6. $\sin(90^o - A) = \cos A$, $\cos(90^o - A) = \sin A$

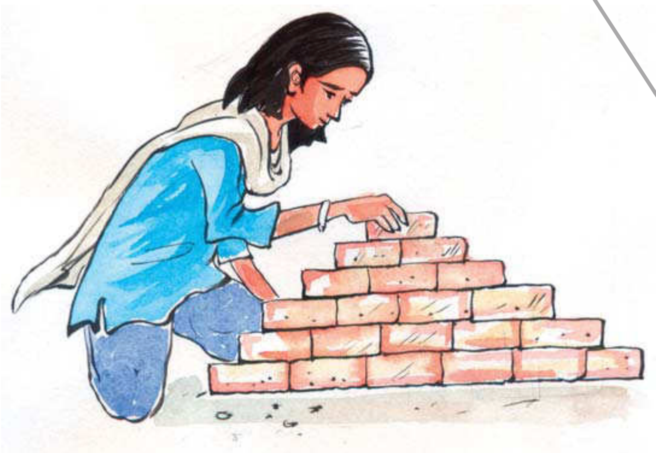
$\tan(90^o - A) = \cot A$, $\cot(90^o - A) = \tan A$

$\sec A(90^o - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90^o - A) = \sec A$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ for $0^o \leq A \leq 90^o$

$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ $(0^o \leq A \leq 90^o)$





Downloaded from www.apteachers.in