

అధ్యాయము

12

## త్రికోణమితి అనువర్తనాలు

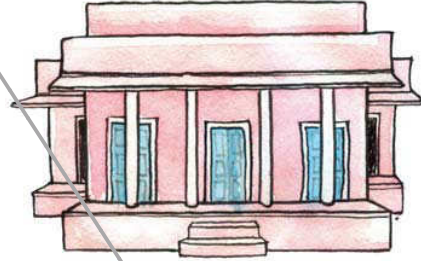
(Applications of Trigonometry)

## 12.1 పరిచయం

ప్రపంచంలో అతి ఎత్తైన పర్వత శిఖరం “ఎవరెస్టు శిఖరం” అని, దాని ఎత్తు 8848 మీటర్లు అని సాంఘిక శాస్త్రంలో చదువుకొనే ఉంటారు.

ఆదిలాబాద్ జిల్లాలోని కుంటూల జలపాతం ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్రంలోనే అతి ఎత్తైన “ప్రాకృతిక జలపాతం” అని, దాని ఎత్తు 147 అడుగులు అని ఎక్కడైన చదువుకొనే ఉంటారు.

వీటి ఎత్తులు ఏ విధంగా కొలిచి ఉంటారు ? మీరు మీ పాఠశాల భవనం ఎత్తును గాని, మీ చుట్టు ప్రక్కల లోని ఎత్తైన చెట్టు ఎత్తును గాని కనుక్కోగలరా ? ఈ విధానాన్ని కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా తెలుసుకొనే ప్రయత్నం చేద్దాం.

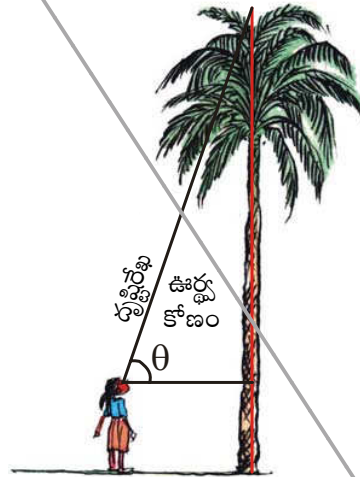


విజయ వారి ఇంటి దగ్గరి తాటి చెట్టు ఎత్తును కనుక్కోవాలను కుంది. ఆమె చెట్టు చెట్టుపై కొనను గుర్తించింది. “ఆమెకన్ను” మరియు “చెట్టు పై కొన” కలిపే ఒక రేఖను ఊహించింది. ఈ రేఖను “దృష్టిరేఖ” అంటారు. ఇంకా ఆమె తన కంటి నుండి “క్షితిజ సమాంతర రేఖ”ను ఊహించింది.

ఇక్కడ “దృష్టిరేఖ”, “క్షితిజ సమాంతర రేఖ” మరియు “చెట్టు”లు ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తున్నాయి.

చెట్టు ఎత్తును కనుక్కోడానికి ఆమె ఈ త్రిభుజంలో ఒక కోణం, ఒక “భుజం” తెలుసుకోవాలి. అంతే !

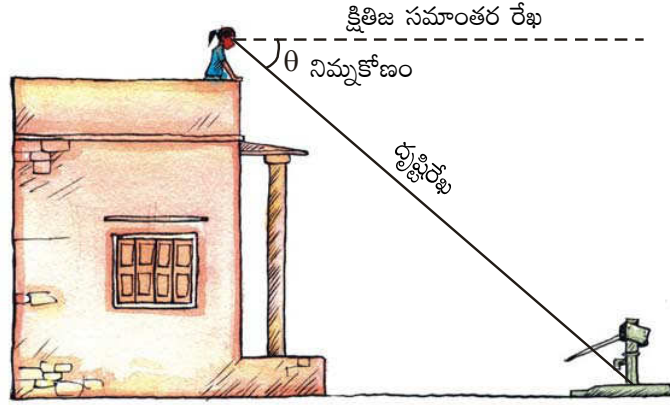
“క్షితిజ సమాంతరరేఖ”కు “దృష్టిరేఖ” పైన ఉంటే క్షితిజ సమాంతర రేఖతో దృష్టిరేఖ చేయు కోణాన్ని “ఊర్ధ్వకోణం” అంటారు.



ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

మీరు మీ పాఠశాల భవనంపై నిలబడి ఉన్నారనుకోండి. మీ పాఠశాల ఆవరణలోని బోరింగ్ మీ పాఠశాల భవనం నుండి ఎంత దూరంలో ఉందో తెలుసుకోవాలనుకోండి. దాని కొరకు ఆ బోరింగ్ అడుగు భాగాన్ని పరిశీలించాలి.

అప్పుడు, “క్షితిజ సమాంతర రేఖ” కు దృష్టి రేఖ క్రిందికి ఉంటుంది. ఇచ్చట, క్షితిజ సమాంతర రేఖతో దృష్టి రేఖ చేయు కోణాన్ని “నిమ్నకోణం” అంటారు.



సర్వేయరు చాలా వందల యేండ్ల నుండియే త్రికోణమితిని వాడుతూ ఉన్నారు. వారు సర్వే చేసే ప్రక్రియలో ఊర్ధ్వకోణం, నిమ్నకోణాలను కనుక్కోడానికి “థియోడలైట్” అనే పరికరాన్ని వాడతారు. 19వ శతాబ్దంలో “గ్రేట్ బ్రిటన్ సర్వే” పేరుతో బ్రిటిష్ ఇండియా భారతదేశంలో సర్వే చేయడానికి రెండు పెద్ద “థియోడలైట్”లను తయారు చేయించింది. ఆ సర్వే జరుగుతుండగా, 1852లో ప్రపంచంలోనే ఒక అతి పెద్ద పర్వత శిఖరాన్ని భారతదేశంలో కనుగొన్నారు. 160 కి.మీ. దూరం నుండి చుట్టు ఉన్న ఆరు విభిన్న కూడళ్ల నుండి పరిశీలించి పర్వతం యొక్క ఎత్తును కనుగొన్నారు. 1856 లో ఆ సర్వే చేసిన అధికారియైన “సర్ జార్జ్ ఎవరెస్ట్” గౌరవార్థం ఆ శిఖరానికి అతని పేరు పెట్టడం జరిగింది. మొట్టమొదటగా అతడు ఉపయోగించిన ఆ థియోడలైట్లను డెహరాడూన్ లోని సర్వే ఆఫ్ ఇండియా మ్యూజియంలో సందర్శనార్థం పెట్టారు.

## 12.2 సమస్యల సాధనకు పటాలు గీద్దాం

ఎత్తులు మరియు దూరాలకు సంబంధించిన సమస్యలు సాధించడానికి పటాలను గీసేటప్పుడు కింది విషయాలను దృష్టిలో పెట్టుకోవాలి.

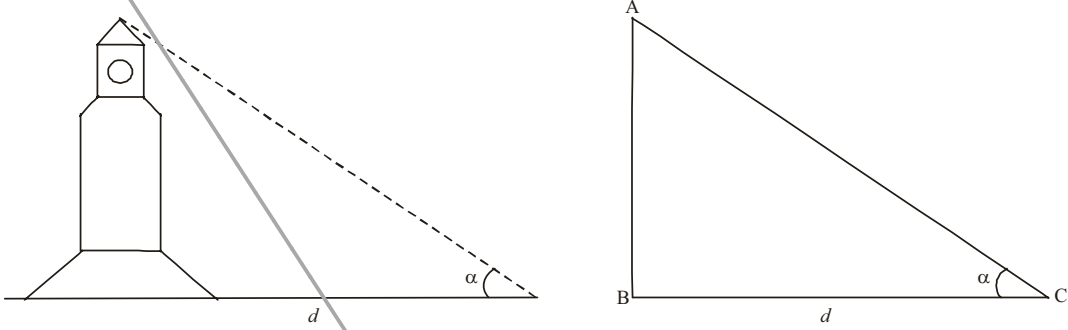
- గణిత పరంగా సౌలభ్యం కొరకు టవర్లు, చెట్లు, భవనాలు, ఓడలు, పర్వతాలు మొ॥ వాటిని రేఖీయంగానే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి.
- ఊర్ధ్వకోణం లేదా నిమ్న కోణాన్ని క్షితిజ సమాంతర రేఖ ఆధారంగానే తీసుకోవాలి.
- సమస్యలో పరిశీలిస్తున్న వ్యక్తి ఎత్తు ఇవ్వనట్లైతే, అతడి ఎత్తును ఉపేక్షించి సమస్యను సాధించాలి.

ఎత్తులు మరియు దూరాలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించే క్రమంలో, ఊర్ధ్వ, నిమ్న కోణాలతో ఆ సందర్భాలను జ్యామితీయంగా ఊహించాల్సి ఉంటుంది. సమస్యలను సాధించటానికి వాటికి సంబంధించిన పటాలను గీయడం చాలా ముఖ్యం. ఆ పటాల ఆధారంగా సులభంగా సమస్యలను సాధించవచ్చు. ఇక కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

**ఉదాహరణ-1.** పరిశీలకుని నుండి  $d$  మీటర్ల దూరంలో నున్న ఒక క్లాక్ టవర్ యొక్క పై కొన  $\alpha^0$  ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి.

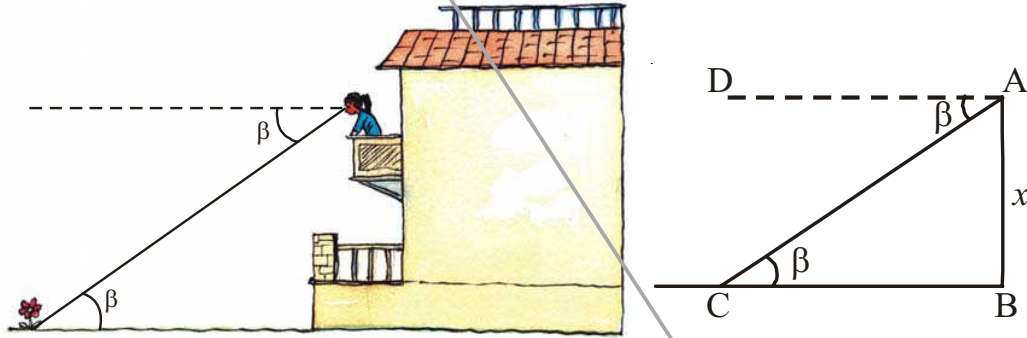
ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

**సాధన :** సమస్య ఆధారంగా ఈ క్రింది పటం గీయవచ్చు.



**ఉదాహరణ-2.** రింకి మొదటి అంతస్తులోని బాల్కనీ నుండి బయటి భూమిపై నున్న పూవును  $\beta^\circ$  నిమ్నకోణంతో చూస్తుంది. మొదటి అంతస్తు ఎత్తు 'x' మీటర్లు. ఈ సందర్భంలో పటాన్ని గీయండి.

**సాధన :**

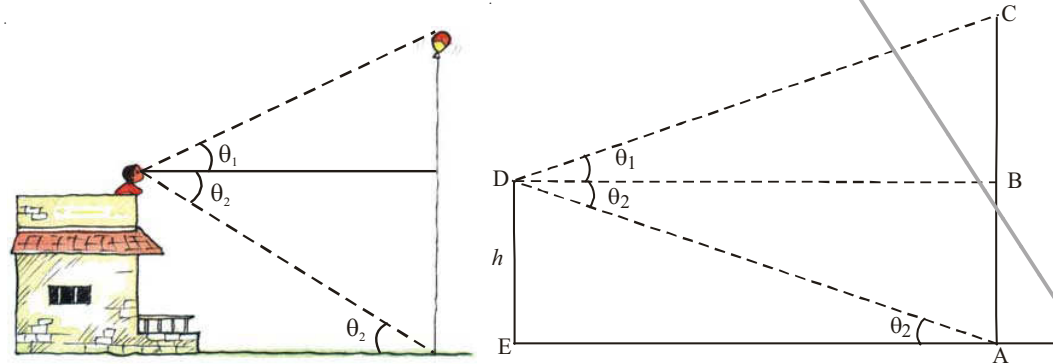


ఇక్కడ  $\angle DAC = \angle ACB = \beta$  (ఎందుకు ?)

**ఉదాహరణ-3.** ఒక పెద్ద త్రాడు సహాయంతో ఒక పెద్ద బెలూన్ గాలిలో తేలుతుంది. ఒక భవనంపై నున్న ఒక వ్యక్తి దానిపై భాగాన్ని  $\theta_1$  ఊర్ధ్వకోణంతో మరియు త్రాడు అడుగుభాగాన్ని  $\theta_2$  నిమ్నకోణంతో పరిశీలించాడు. ఆ భవనం ఎత్తు h అడుగులు. ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి.

**సాధన :** ఇక్కడ మనం గమనించగా

$\angle BDA = \angle DAE$  (ఎందుకు ?)





### జని చేయండి

- కింది సందర్భాలకు పటాలను గీయండి.
  - ఒక వ్యక్తి 'A' ఊర్ధ్వ కోణముతో ఒక గాలి పటాన్ని ఎగురవేస్తున్నాడు. గాలి పటాన్ని 'l' పొడవు గల దారంతో ఎగురవేస్తున్నాడు. ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి.
  - ఒక నది యొక్క ఒక వైపు ఉన్న 'h' ఎత్తుగల చెట్టుపై నుండి నది యొక్క రెండు తీరాలను  $\theta_1$  మరియు  $\theta_2$  ( $\theta_1 < \theta_2$ ) నిమ్న కోణాలతో ఒక వ్యక్తి పరిశీలించాడు నది వెడల్పు 'd' అయిన ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి.



### ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

- మీ పాఠశాల భవనం నుండి 'd' దూరంలో గల బిందువు నుండి భవనంపై భాగాన్ని 'A' ఊర్ధ్వకోణముతో పరిశీలించారు. ఈ పాఠశాల భవనం ఎత్తును కనుగొనడానికి ఏ త్రికోణమితియ నిష్పత్తిని ఎంచుకొంటారు ?
- 'x' మీటర్ల పొడవు గల ఒక నిచ్చైన భూమితో  $\theta$  కోణం చేస్తూ ఒక గోడకు వేయబడిఉంది. నిచ్చైన పై భాగం సృశించిన గోడస్థానం యొక్క ఎత్తును కనుక్కోడానికి ఏ త్రికోణమితియ నిష్పత్తిని ఎంచుకోవాలి?

ఇంతవరకు మనం ఎత్తులు మరియు దూరాలకు సంబంధించిన పటాలను గీయడం, జ్యామితియంగా వాటిని ఊహించడం చర్చించాం. ఇక మనం ఎత్తులు మరియు దూరాలను కనుగొనే విధానాన్ని చర్చిద్దాం.

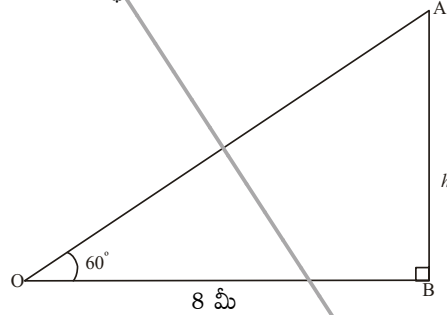
**ఉదాహరణ-4.** ఒక బాలుడు ఒక విద్యుత్ స్తంభం అడుగు భాగం నుండి 8 మీటర్ల దూరంలో నున్న బిందువు నుండి విద్యుత్ స్తంభం పై భాగాన్ని  $60^\circ$  ఊర్ధ్వ కోణాలతో పరిశీలించాడు. ఆ స్తంభం ఎత్తును కనుక్కోండి.

**సాధన :** పటం నుండి, త్రిభుజం OAB నుండి

$$OB = 8 \text{ మీటర్లు}$$

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$\text{స్తంభం ఎత్తు} = AB = h \text{ మీటర్లు అనుకొనగా}$$



( $\Delta OAB$  లో  $\angle AOB$  యొక్క ఆసన్న భుజం విలువ మనకు తెలుసు. మనం “ఎదుటి భుజం” విలువను కనుక్కోవాలి. కావున ఆసన్న భుజం మరియు ఎదుటి భుజాల నిష్పత్తి “tan” ను పరిగణించాలి).

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{OB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8} \quad h = 8\sqrt{3} \text{ మీ.}$$

ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

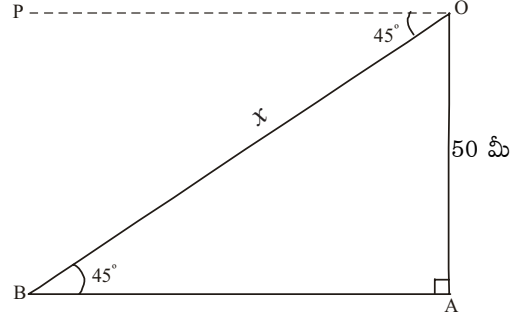
**ఉదాహరణ-5.** ఒక హెలికాప్టర్లో ఉన్న రాజేందర్ భూమిపై నున్న ఒక వ్యక్తిని  $45^\circ$  నిమ్నకోణంలో పరిశీలించాడు. భూమిపై నుండి హెలికాప్టర్ 500 మీటర్ల ఎత్తులో ఎగురుతూ ఉంటే, రాజేందర్కు, ఆ వ్యక్తి ఎంత దూరంలో ఉన్నాడు.

**సాధన :** పటం నుండి, త్రిభుజం OAB లో

$$OA = 500 \text{ మీటర్లు}$$

$$\angle POB = \angle OAB = 45^\circ \text{ (ఎందుకు ?)}$$

OB = రాజేందర్ నుండి వ్యక్తి దూరం =  $x$ .



(త్రిభుజం OAB లో  $\angle OBA$  యొక్క ఎదుటి భుజం కొలత మనకు తెలుసు. కర్ణం OB విలువ కనుక్కోవాలి. ఎదుటి భుజం, కర్ణాల నిష్పత్తి “sin” కావున “sin”ను ఎంచుకొంటాం)

$$\sin 45^\circ = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{500}{x}$$

$$x = 500\sqrt{2} \text{ మీటర్లు}$$

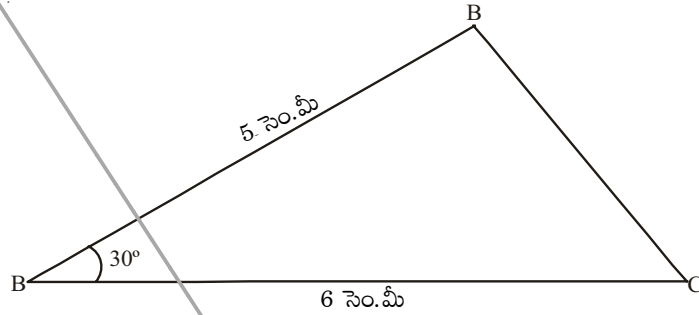
రాజేందర్ నుండి  $500\sqrt{2}$  మీటర్ల దూరంలో వ్యక్తి ఉన్నాడు.



### అభ్యాసం - 12.1

- భూమిపై ఒక టవర్ నిటారుగా నిలిచి ఉంది. ఆ టవర్ అడుగు నుండి 15 మీటర్ల దూరం నుండి ఆ టవర్పై కొన  $45^\circ$  ఊర్ధ్వకోణంలో పరిశీలించబడింది. ఆ టవర్ ఎత్తు ఎంత?
- ఒక చెట్టు గాలికి విరిగి, విరిగిన పై భాగం భూమికి  $30^\circ$  ల కోణం చేస్తూ భూమిపై పడింది. చెట్టు అడుగుభాగం నుండి, కిందపడిన చెట్టు కొన మధ్యదూరం 6 మీటర్లు. చెట్టు విరగక ముందు ఆ చెట్టు ఎత్తు ఎంత?
- ఒక పార్క్లో పిల్లలు ఆడుకోవడానికి ఒక కాంట్రాక్టర్ ఒక జారుడు బల్లను ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. దానిని 2 మీటర్ల ఎత్తుతో, భూమితో  $30^\circ$  ల కోణం చేసేటట్లు ఏర్పరచాలనుకొంటే ఆ జారుడు బల్ల పొడవు ఎంత ఉంటుంది?
- ఉదయం 7 గంటలకు 15 మీటర్ల ఎత్తు గల స్థంభం యొక్క నీడ పొడవు  $5\sqrt{3}$  మీటర్లు. ఆ సమయంలో సూర్యకిరణాలు, భూమితో ఎంత కోణం చేస్తున్నాయి?
- పవన్ 10 మీటర్ల ఎత్తు గల స్థంభాన్ని 3 బలమైన తాళ్ళ సహాయంతో నిలబెట్టాలనుకున్నాడు. ఒక్కొక్క త్రాడు స్థంభంతో  $30^\circ$  కోణం చేయాల్సి ఉంటే ఎంత పొడవు తాడు తీసుకోవాలి ?

6. విజయ్ భూమి నుండి 6 మీటర్ల ఎత్తు గల భవనంపై నుండి భూమిపై నున్న ఒక లక్ష్యాన్ని  $60^\circ$  నిమ్నకోణంలో బాణంతో ఛేదించాలనుకున్నాడు. విజయ్ నుండి లక్ష్యం ఎంతదూరంలో ఉంటుంది.
7. 9 మీటర్ల ఎత్తు గల విద్యుత్ స్తంభంపై ఒక ఎలక్ట్రిషియన్ మరమ్మత్తు పని చేయాల్సి ఉంది. మరమ్మత్తు చేయడానికి ఆ స్తంభం పై నుండి 1.8 మీటర్ల తక్కువ ఎత్తుకు చేరాలి. ఒక నిచ్చెనను భూమిపై  $60^\circ$  కోణంతో పెట్టాల్సి వస్తే ఎంత పొడవు గల నిచ్చెనను తీసుకోవాలి. నిచ్చెన అడుగుభాగం నుండి స్తంభం అడుగుభాగం దూరం ఎంత?
8. ఒక నావ ఒక నదిని దాటాల్సి ఉంది. నదీ ప్రవాహం కారణంగా ఆ నదీ తీరంతో  $60^\circ$  ల కోణం చేస్తున్న ఆ నావ 600మీటర్లు ప్రయాణించి అవతలి తీరాన్ని చేరింది. ఆ నది వెడల్పెంత?
9. 1.8 మీ ఎత్తు ఉన్న ఒక పరిశీలకుడు ఒక తాటి చెట్టు నుండి 13.2 మీటర్ల దూరంలో ఉన్నాడు. ఆ చెట్టుపై పరిశీలకుడి కంటి నుండి  $45^\circ$  ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. ఆ చెట్టు ఎత్తు ఎంత?
10. ప్రక్కనున్న పటంలో  $AC = 6$  సెం.మీ,  $AB = 5$  సెం.మీ మరియు  $\angle BAC = 30^\circ$ . అయిన త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

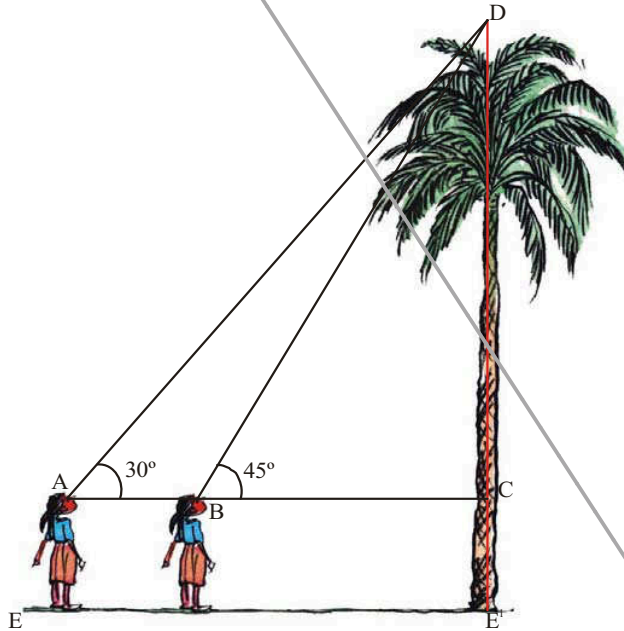


### 12.3 రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలతో కూడిన సమస్యలు

మనం ఇంతవరకు ఒక త్రిభుజంతో కూడిన సమస్యలను సాధించాం. ఒక వేళ రెండు త్రిభుజాలతో ఒకే సందర్భం ఉంటే, సమస్యను ఎలా సాధించాలి?

మీరు ఒక తాటి చెట్టును కొంత దూరం నుండి పరిశీలిస్తున్నారనుకోండి. మరియు ఆ చెట్టు ఎత్తును కనుక్కోవాలనుకున్నారనుకోండి. మీరు ఆ చెట్టును రెండు వేరువేరు పరిశీలనా స్థానాల నుండి పరిశీలిస్తున్నారనుకోండి.

ఈ సమస్యను ఎలా సాధిస్తారు? మీరు ఒక తాటి చెట్టుపై కొనను  $45^\circ$  ఊర్ధ్వకోణంలో పరిశీలిస్తున్నామనుకోండి. ఆ తాటి చెట్టును ఇంకా 11 మీటర్ల దూరం పోయిన తర్వాత ఊర్ధ్వకోణం  $30^\circ$  కు మారిందనుకొనుము.



ఆ చెట్టు ఎత్తును ఎలా కనుగొంటామో చూద్దాం !  
పటం నుండి

$$AB = 11 \text{ మీ}$$

$$\angle DAC = 30^\circ$$

$$\angle DBC = 45^\circ$$

తాటి చెట్టు ఎత్తు  $CD = h$  మీటర్లు

$$BC \text{ పొడవు} = x$$

$$AC = 11 + x \text{ అవుతుంది.}$$

త్రిభుజం BDC నుండి

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h$$

...(1)

త్రిభుజం ADC నుండి

$$\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{11+x}$$

$$h = \frac{11+x}{\sqrt{3}} = \frac{11+h}{\sqrt{3}}$$

(ఎందుకు)

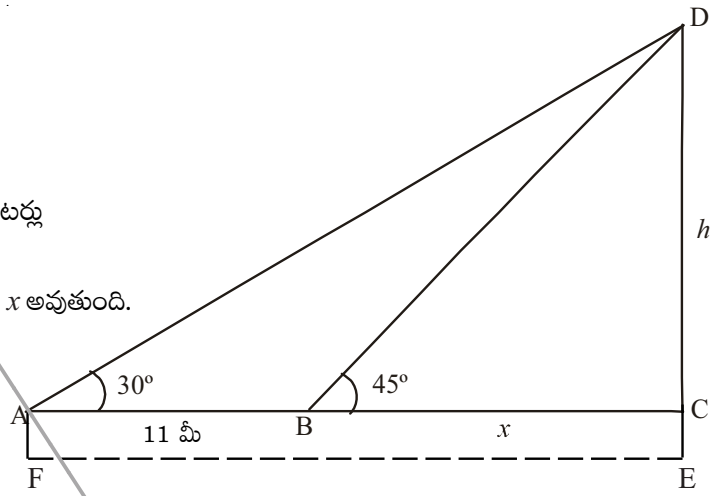
$$h = \frac{11}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{(\sqrt{3}-1)} \text{ మీటర్లు.}$$

**గమనిక :** తాటిచెట్టు ఎత్తు  $CD + CE$  అవుతుంది. ఇక్కడ  $CE = AE =$  బాలిక ఎత్తు).



**ఉదాహరణ-6.** 30 మీటర్ల ఎత్తు గల ఒక గుడి పై భాగాన్ని దాని ఇరువైపులా నున్న ఇద్దరు వ్యక్తులు  $30^\circ$  మరియు  $60^\circ$  ఊర్ధ్వకోణాలలో పరిశీలించారు. ఆ ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్య దూరం ఎంత?

**సాధన :** పటం నుండి దేవాలయం ఎత్తు  $BD = 30$  మీటర్లు

మొదటి వ్యక్తి పరిశీలిస్తున్నప్పుడు ఊర్ధ్వకోణం  $\angle BAD = 30^\circ$

రెండవ వ్యక్తి పరిశీలిస్తున్నప్పుడు ఊర్ధ్వకోణం  $\angle BCD = 60^\circ$

మొదటి వ్యక్తి నుండి గుడి దూరం  $AD = x$  రెండవ వ్యక్తి నుండి గుడి దూరం  $CD = d$  అనుకొనగా

$\triangle BAD$  నుండి

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{x}$$

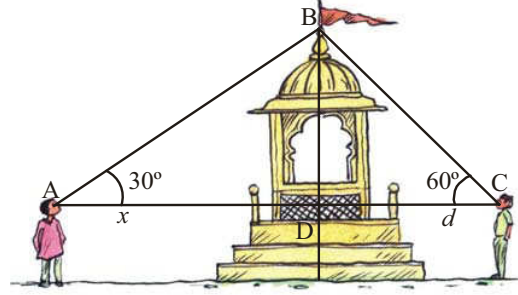
$$x = 30\sqrt{3} \dots\dots\dots (1)$$

$\triangle BCD$  నుండి

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{d}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{d}$$

$$d = \frac{30}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots (2)$$



(1) & (2) నుండి ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్యదూరం =  $BC + BA = x + d$

$$= 30\sqrt{3} + \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 \times 4}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} \text{ మీటర్లు}$$

**ఉదాహరణ-7.** ఒక టవర్ పాదం వరకు ఒక చక్కని ( straight) రహదారి ఉంది. ఆ టవర్ పై నిలబడి ఉన్న రామయ్య అనే వ్యక్తి దూరం నుండి వస్తున్న కారును  $30^\circ$  ల నిమ్నకోణంలో చూసాడు. సమవేగంతో వస్తున్న ఆ కారును 6 సెకండ్ల తర్వాత  $60^\circ$  నిమ్నకోణంలో గమనించాడు. ఈ స్థానం నుండి కారు టవర్ ను చేరడానికి పట్టు కాలం ఎంత?

**సాధన :** పటం నుండి

6 సెకండ్లలో కారు ప్రయాణించిన దూరం =  $AB = x$  మీటర్లు

టవర్ ఎత్తు  $CD = x$  మీటర్లు

కారు ప్రయాణించాల్సిన మిగిలిన దూరం  $BC = d$  మీటర్లు

$AC = AB + BC = (x + d)$  మీటర్లు

$\angle PDA = \angle DAP = 30^\circ$  (ఎందుకు ?)

$\angle PDB = \angle DBP = 60^\circ$  (ఎందుకు?)

$\triangle BCD$  నుండి



$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \sqrt{3}d \quad \dots(1)$$

$\Delta ACD$  సుండి

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(x+d)}$$

$$h = \frac{(x+d)}{\sqrt{3}} \quad \dots(2)$$

(1) & (2) సుండి

$$\frac{x+d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}d$$

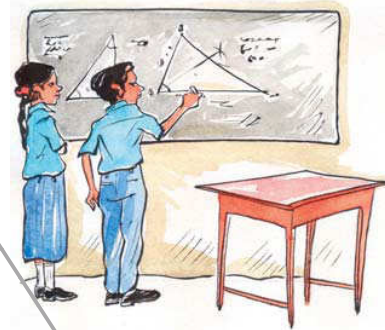
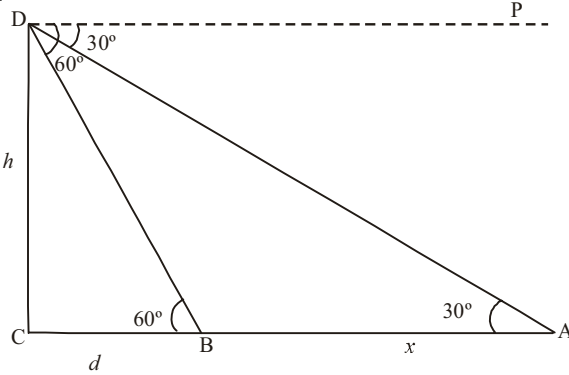
$$x+d = 3d$$

$$x = 2d$$

$$d = \frac{x}{2}$$

'x' మీటర్లు దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టు కాలం = 6 సెకండ్లు

'd' =  $\frac{x}{2}$  మీటర్లు దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టు కాలం = 3 సెకండ్లు.



### అభ్యాసం - 12.2

1. ఒక TV టవర్ ఒక రోడ్డు ప్రక్కన నిటారుగా నిలబెట్ట బడి ఉంది. రోడ్డుకు అవతలి వైపు నుండి టవర్ పై కొనను పరిశీలించిన  $60^\circ$  ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. ఇంకా టవర్ పాదం మరియు ఈ స్థానాన్ని కలిపే సరళరేఖపై 10 మీటర్ల దూరం జరిగిన పిదప టవర్ పై కొన  $30^\circ$  ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవర్ ఎత్తును మరియు రోడ్డు వెడల్పును కనుగొనండి.

2. 1.5 మీటర్లు ఎత్తుగల ఒక బాలుడు 30 మీటర్ల ఎత్తు గల గుడిపై కొనను కొంతదూరము నుండి పరిశీలిస్తున్నాడు. అతడు ఉన్న చోటు నుండి ముందుకు నడిచిన గుడి గోపురం కొన అతని కంటితో చేయు కోణం  $30^\circ$  నుండి  $60^\circ$  లకు మారింది. అతడు నడిచిన దూరం ఎంత ?
3. ఒక విగ్రహం 2మీటర్ల ఎత్తుగల పీఠం పై నిలబెట్టబడి ఉంది. దానిని కొంత దూరం నుండి పరిశీలించిన విగ్రహంపై భాగం  $60^\circ$  మరియు పీఠంపై భాగం  $45^\circ$  ఊర్ధ్వకోణాలు చేస్తున్నాయి. విగ్రహం ఎత్తు ఎంత?
4. ఒక భవనం పై నుండి ఒక సెల్ టవర్ పై భాగాన్ని పరిశీలించిన  $60^\circ$  ఊర్ధ్వకోణం, దాని పాదము  $45^\circ$ . నిమ్నకోణం చేస్తుంది. భవనం నుండి టవర్ కు గల మధ్యదూరం 7మీటర్లు అయిన టవర్ ఎత్తును కనుగొనండి.
5. భూమితో  $30^\circ$ ల ఊర్ధ్వకోణం చేస్తూ 18 మీటర్ల పొడవున్న ఒక ధృఢమైన లోహపు తీగ ఆధారంగా ఒక విద్యుత్ స్తంభం నిలబెట్టబడి ఉంది. తీగపొడవు చాలా ఎక్కువ ఉన్న కారణంగా తీగలో కొంత భాగం కత్తిరించి, మిగిలిన దానిని భూమితో  $60^\circ$  కోణం చేస్తూ అమర్చబడింది. తీగలో కత్తిరించగా మిగిలిన తీగపొడవు ఎంత?
6. ఒక టవర్ అడుగుభాగం నుండి భవనం పై భాగం  $30^\circ$  ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. భవనం అడుగుభాగం నుండి టవర్ పై భాగం  $60^\circ$  ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవర్ ఎత్తు 30 మీటర్లు అయిన, భవనం ఎత్తు కనుగొనుము?
7. 120 అడుగుల వెడల్పైన రోడ్డుకు ఇరువైపుల సమాన ఎత్తు కలిగిన రెండు స్తంభాలు నిలబెట్టబడి ఉన్నాయి. వాటి మధ్యలో ఉన్న రోడ్డుపై ఒక బిందువు నుండి వాటిపై భాగాలను పరిశీలించిన అవి  $60^\circ$  మరియు  $30^\circ$  ఊర్ధ్వకోణాలు చేస్తున్నాయి. అయిన ఆ స్తంభాల ఎత్తు కనుగొనుము మరియు ప్రతిస్తంభము అడుగుభాగం నుండి బిందువుకు గల దూరమును కనుగొనుము?
8. టవర్ తో ఒకే సరళరేఖపై ఉండే 4 మీటర్లు మరియు 9 మీటర్ల దూరంలో నున్న రెండు బిందువుల నుండి టవర్ కొనను పరిశీలించిన చేసే ఊర్ధ్వకోణాలు పూరకాలు. టవర్ ఎత్తును కనుగొనండి.
9. భూమిపై నున్న A బిందువు నుండి ఒక జెట్ విమానాన్ని పరిశీలిస్తే  $60^\circ$  ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. 15 సెకన్ల తర్వాత దాని ఊర్ధ్వకోణం  $30^\circ$  మారుతుంది. ఆ జెట్ విమానం  $1500\sqrt{3}$  మీటర్ల స్థిర ఎత్తులో ఎగురుతూ ఉంటే దాని వేగాన్ని కనుక్కోండి. ( $\sqrt{3} = 1.732$ )
10. 'h' మీటర్లు ఎత్తు గల PQ టవరుకు కొంతదూరంలో గల బిందువు A నుండి చింకి టవరు పై భాగాన్ని కొంత ఊర్ధ్వకోణములో పరిశీలించింది. బిందువు A నుండి "d" దూరం టవరు వైపు నడిస్తే ఆ ఊర్ధ్వకోణం రెట్టింపయింది. ఆస్థానం నుండి ఇంకా టవరు వైపు  $\frac{3d}{4}$  నడిచిన తర్వాత స్థానం A వద్ద ఊర్ధ్వకోణానికి 3 రెట్ల ఊర్ధ్వకోణంలో టవరు పై భాగం కనిపించింది. అయితే  $36h^2 = 35d^2$  అని చూపుము.



### బచ్చిక అభ్యాసము

[పరీక్షలకొరకు నిర్దేశించబడినది కాదు]

1. 1.2 మీటర్లు ఎత్తు గల బాలిక ఆకాశంలో క్షితిజ సమాంతరంగా, 88.2 మీటర్ల ఎత్తుతోపాటు గాలిలో ప్రయాణిస్తున్న బెలూనును  $60^\circ$  ఊర్ధ్వకోణంలో గమనించింది. కొంతకాలం తర్వాత ఆ ఊర్ధ్వకోణం  $30^\circ$  గా మారింది. ఈ మధ్యకాలంలో బెలూను ప్రయాణించిన దూరం ఎంత ?
2. ఒక భవన పాదం నుండి ఎదురుగా నున్న టవరుపై భాగం  $30^\circ$  ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవరు పాదం నుండి భవన పైభాగం  $60^\circ$  ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. వాటి ఎత్తులు ఏ నిష్పత్తిలో ఉంటాయి?
3. A, B మరియు C అను మూడు పడవలు ఒకే సరళరేఖలో ప్రయాణిస్తూ లైట్‌హౌస్ వైపు వస్తున్నవి. ఆ పడవలలో నుండి లైట్‌హౌస్ పై భాగాన్ని గమనించిన వరుసగా అవి a, 2a మరియు 3a ఊర్ధ్వకోణాలను చేస్తున్నవి. A మరియు B పడవల మధ్య దూరం x అయిన ఆ లైట్‌హౌస్ ఎత్తు ఎంత?
4. ఒక దీర్ఘఘనాకారంలో ఉన్న గూడు లోపలి భాగంలో పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి  $1:\sqrt{2}:1$  ఆ గూటిలో పట్టు అతిపెద్ద కట్ట, దాని భూమితో చేయు కోణం ఎంత?
5. ఒక గోళాకార లోహపు బంతి ఘనపరిమాణం  $232848$  సెం.మీ<sup>3</sup>. దానిని కరిగించి  $120^\circ$ లు శీర్షకోణము చేయు శంఖువు ఆకారంలో పోతపోశారు. అయిన దాని భూవ్యాసార్థం, ఎత్తులను కనుగొనుము.



### మనం ఏమి చర్చించాం

మనం అధ్యాయంలో ఇంతవరకు కింది అంశాలను తెలుసుకొన్నాం.

1. (i) ఒక వస్తువుపై ఒక బిందువు నుండి పరిశీలకుని కంటిని కలిపే సరళరేఖను దృష్టిరేఖ అంటారు.  
(ii) క్షితిజ సమాంతర రేఖకు, దృష్టిరేఖపై ఉన్నపుడు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని ఊర్ధ్వకోణం అంటారు. ఈ సందర్భంలో పరిశీలకుడి తలపైకెత్త బడుతుంది.  
(iii) క్షితిజ సమాంతర రేఖకు దృష్టి రేఖ క్రింద ఉన్నప్పుడు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని నిమ్నకోణం అంటారు. ఈ సందర్భంలో పరిశీలకుడి తల క్రింద వైపుకు చూస్తుంది.
2. ఒక వస్తువు యొక్క పొడవు గాని, ఎత్తును గాని కనుగొనడానికి, రెండు వస్తువుల మధ్య దూరాన్ని లెక్కించడానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను వాడుతూ ఉంటాం.