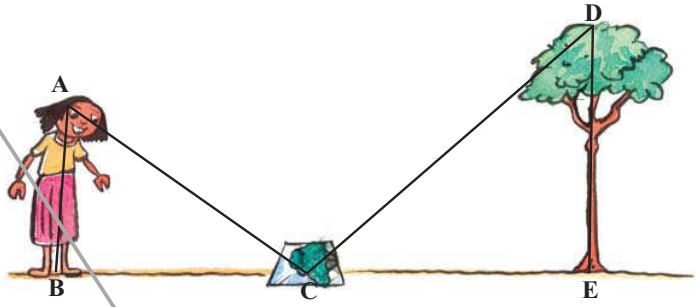
అధ్యాయము

# 8 సరూప త్రిభుజాలు

(Similar Triangles)

## 8.1 పరిచయం

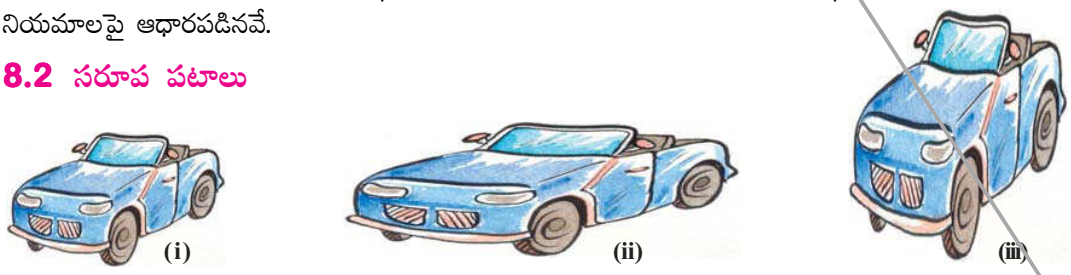



స్నిగ్ధ వాళ్ళ ఇంటి పెరట్లో ఒక పొడవైన చెట్టు వుంది. స్నిగ్ధ దాని పొడవు ఎంతో తెలుసుకోవాలని అనుకొంది, కాని దానిని ఎలా కనుక్కోవాలో ఆమెకు తెలియదు. ఇంతలో ఆమె మావయ్య యింటికి వచ్చాడు. స్నిగ్ధ వాళ్ళ మావయ్యను యీ చెట్టు పొడవు కనుక్కోవడంలో సహాయం చేయమని అడిగింది. అతను కొంతసేపు ఆలోచించి, ఆమెను ఒక అద్దం తెమ్మని చెప్పాడు. అతను ఆ అద్దాన్ని నేలపై చెట్టు మొదలు నుండి కొంత దూరంలో వుంచాడు. అపుడు స్నిగ్ధను అద్దానికి అవతలివైపు ఏ స్థానం నుండి అద్దంలో చెట్టుపై భాగాన్ని చూడగలదో అక్కడ నిలబడమని చెప్పాడు.

మనం పటాన్ని గీసినపుడు, బాలిక (AB) నుండి అద్దం (C) మరియు అద్దం నుండి చెట్టు (DE) వరకు గీసిన పై పటంలో వలె త్రిభుజములు ABC మరియు DEC లను గమనించవచ్చును. మరి యీ రెండు త్రిభుజాల గురించి మీరు ఏమీ చెప్పగలరు ? అవి సర్వసమాన త్రిభుజాలా ? కాదు కదా ఎందుకంటే వాటి ఆకారాలు ఒకటే కాని పరిమాణాలు మాత్రం వేరుగా వున్నాయి. ఇలా ఆకారాలు ఒకటే వుండి ఒకే పరిమాణం వుండనవసరం లేని జ్యామితీయ పటాలను ఏమంటారో మీకు తెలుసా ? అవి సరూప పటాలు.

చెట్లు మరియు కొండల ఎత్తును, సూర్యుడిలా దూరంగా నున్న వాటి మధ్య దూరాలను ఎలా కనుగొంటారో నీవు ఊహించగలవా ? వీటిని మనం ప్రత్యక్షంగా టేపు సహాయంతో కొలవగలమా ? నిజానికి ఈ ఎత్తులు మరియు దూరాలను మనం పరోక్ష పద్ధతుల ద్వారా కనుగొంటాము. ఈ పరోక్ష పద్ధతులన్నీ సరూప పటాల నియమాలపై ఆధారపడినవే.

## 8.2 సరూప పటాలు




పైన ఇచ్చిన వస్తువు (కారు) పటాన్ని పరిశీలించండి.

దానివెడల్పును మార్చకుండా, పొడవును రెట్టింపు చేసినపుడు అది పటము (ii)లో వలె కనిపిస్తుంది.

అదే పటము (i)లోని పొడవును అలాగే వుంచి, వెడల్పును రెట్టింపు చేసినపుడు అది పటము(iii)లో వలె కనిపిస్తుంది.

మరి పటము (ii) మరియు పటము (iii) ల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? అవి పటము(i)ని పోలి వున్నాయా? పటము విరూపమవడాన్ని గమనించవచ్చును. అవి సరూపాలని మీరు చెప్పగలరా? లేదుకదా ఎందుకంటే అవి ఒకే ఆకారాన్ని కలిగి వున్నప్పటికీ సరూపాలు కావు.

ఒక ఫోటోగ్రాఫర్ ఒకే ఫిల్మ్ (నెగెటివ్) నుండి వేరు వేరు పరిమాణాలు గల ఫోటోలను ఎలా ముద్రించగలుగుతుందో ఆలోచించండి. మీరు యీ ఫోటోలలో స్టాంప్ సైజు, పాస్‌పోర్ట్ సైజు, కార్డు సైజు ఫోటోల గురించి వినే వుంటారు. ఆమె సాధారణంగా ఫోటోను 35 మి.మీ. పరిమాణం కలిగిన చిన్న ఫిల్మ్‌పై తీసుకొంటుంది. తరువాత దానిని 45 మి.మీ (లేదా 55 మి.మీ)కు పెద్దదిగా చేస్తుంది. ఆ చిన్న ఫోటోగ్రాఫ్‌లోని ప్రతీ రేఖా ఖండము 35 : 45 (లేదా 35 : 55) నిష్పత్తిలో పెద్దది కావడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. ఇంకా రెండు వేరువేరు పరిమాణాలు కల ఆ ఫోటోగ్రాఫ్‌లలో కోణాలు సమానంగా వుండడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. అంటే ఆ ఫోటోగ్రాఫ్‌లు సరూపాలు.

(i) (ii) (iii)

అదే విధంగా జ్యామితిలో, భుజాల సంఖ్య సమానంగా వున్న రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా వుండాలి మరియ అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో (లేదా) అనుపాతంలో వుండాలి.

ఒక బహుభుజిలో భుజాలన్నీ మరియు కోణాలన్నీ సమానంగా వుంటే దానిని క్రమ బహుభుజి అంటారు.

అనురూప భుజాల నిష్పత్తిని సాధారణంగా స్కేలు (లేదా) స్కేలు గుణకం (లేదా) ప్రత్యామ్నాయ గుణకం అంటారు. నిజజీవితంలో ఒక భవనాన్ని నిర్మించడానికి ముందుగా దానిని కాగితముపై స్కేలునకు గీయుదురు. దానినే మనం బ్లూప్రింటు అంటాము.

**ఆలోచించండి, చర్చించండి.**

నిజ జీవితంలో ఇలా 'స్కేలు'ను వుపయోగించే సందర్భాలకు మరికొన్ని ఉదాహరణలు చెప్పగలరా?

సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కల అన్ని క్రమ బహుభుజులు ఎప్పుడూ సరూపాలే. ఉదాహరణకు అన్ని చతురస్రాలు సరూపాలు అలాగే అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు సరూపాలు మొదలైనవి.

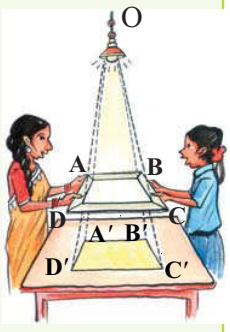
ఒకే వ్యాసార్థము కలిగిన వృత్తాలు సర్వసమానాలు, కాని వేరువేరు వ్యాసార్థాలు గల వృత్తాలు సర్వసమానాలు కాదు. కాని ఆ వృత్తాలన్నింటికీ ఒకే ఆకారముంటుంది కావున అవి అన్నీ సరూపాలు.

ఇంకా సర్వసమాన పటాలన్నీ సరూపాలని మనం చెప్పగలము, కానీ అన్ని సరూప పటాలు, సర్వసమాన పటాలు కానవసరంలేదు.

సరూప చతురస్రాలు సరూప సమ బాహు త్రిభుజాలు సరూప వృత్తాలు

ఈ సరూప పటాల గురించి మరింత స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము.

## కృత్యము




మీ తరగతి గదిలోని పై కప్పుకు అమర్చిన బల్బుకు సరిగ్గా క్రిందకు వచ్చేటట్లు బల్లను అమర్చుము. ఒక సమతలంగా నున్న దళసరి అట్ట నుండి ఒక బహుభుజి (ABCD అనుకొనుము)ని కత్తిరించుము. దానిని నేలకు సమాంతరంగా బల్బుకు మరియు బల్లకు మధ్యలో అమర్చుము. అపుడు బల్లపై చతుర్భుజము ABCD నీడ ఏర్పడును. ఆ నీడ యొక్క అంచులను గీసి ఆ చతుర్భుజానికి $A'B'C'D'$ అని పేరు పెట్టుము.

ఈ చతుర్భుజము $A'B'C'D'$ అనేది చతుర్భుజము ABCD కన్నా పెద్దది లేదా వృద్ధి చెందినది. ఇంకా బల్బు స్థానము 'O' అనుకుంటే $A'$ అనేది కిరణము OA పై వుండును. అలాగే $B'$ అనేది $\overrightarrow{OB}$ పై, $C'$ అనేది $\overrightarrow{OC}$ పై మరియు $D'$ అనేది $\overrightarrow{OD}$ పై వుండును. చతుర్భుజములు ABCD మరియు $A'B'C'D'$ లు ఒకే ఆకారము మరియు వివిధ పరిమాణము లకు చెందిన పటములు.

$A'$ అనేది శీర్షము A కు అనురూపము. దీనిని మనం గణిత చిహ్నాలలో $A' \leftrightarrow A$ అని వ్రాస్తాము. అలాగే $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ మరియు $D' \leftrightarrow D$.

నిజంగా కోణాలను మరియు భుజాలను కొలిచి మనం

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ మరియు

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$ అని నిర్ధారించుకొనవచ్చును.

దీని నుండి సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కల రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే

(i) వాటి అనురూప కోణాలన్నీ సమానంగా వుండాలి.

(ii) వాటి అనురూపభుజాలన్నీ ఒకే నిష్పత్తిలో వుండాలి (అనుపాతంలో వుండాలి) అని ధృవపడుతుంది.

ఒక చతురస్రము, దీర్ఘచతురస్రానికి సరూపమా? ఆ రెండు పటాలలలో అనురూపకోణాలు సమానము కాని అనురూపభుజాలు ఒకే నిష్పత్తి లో వుండవు. కనుక అవి సరూపాలు కావు. రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే పై రెండు నియమాల్లో ఏ ఒక్క నియమం సరిపోదు. రెండు నియమాలు తప్పని సరిగా పాటింపబడాలి.

## ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

ఒక చతురస్రము, రాంబస్ సరూపాలని నీవు చెప్పగలవా ? నీ మిత్రులతో చర్చించుము. ఆ నియమాలు ఎందుకు సరిపోతాయి లేదా ఎందుకు సరిపోవో కారణాలు వ్రాయుము.

### ఇవి చేయండి

1. క్రింది ఖాళీలను సరూపాలు / సరూపాలు కావు చే పూరించండి.
   (i) అన్ని చతురస్రాలు ఎల్లప్పుడూ .....
   (ii) అన్ని సమబాహు త్రిభుజాలు ఎల్లప్పుడూ .....
   (iii) అన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజాలు .....
   (iv) సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కలిగిన రెండు బహుభుజులలో అనురూపకోణాలు సమానము మరియు అనురూపభుజాలు సమానము అయిన అవి .....
   (v) పరిమాణము తగ్గించబడిన లేదా పెంచబడిన ఒక వస్తువు యొక్క ఫోటోగ్రాఫ్‌లు .....
   (vi) రాంబస్ మరియు చతురస్రాలు ఒకదానికొకటి.....
2. క్రింది ప్రవచనాలు సత్యమో, అసత్యమో రాయండి.
   (i) రెండు సరూపపటాలు సర్వసమానాలు
   (ii) రెండు సర్వసమాన పటాలు సరూపాలు
   (iii) రెండు బహుభుజులకు అనురూపకోణాలు సమానాలైన అవి సరూపాలు.
3. ఈ క్రింది వాటికి రెండు వేరువేరు ఉదాహరణలివ్వండి.
   (i) సరూప పటాలు (ii) సరూప పటాలు కానివి

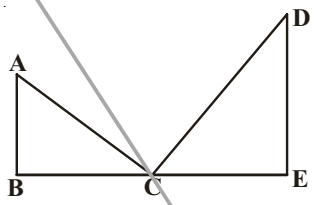
## 8.3 త్రిభుజాల సరూపత

ముందు గీచిన త్రిభుజాలలో రెండు త్రిభుజాలు సరూపక ధర్మాన్ని ప్రదర్శించాయి. రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే

(i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా వుండాలి.

(ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో వుండాలి (అనుపాతంలో వుండాలి) అని మనకు తెలుసు.

పరిచయంలో $\Delta ABC$ మరియు $\Delta DEC$ లలో




$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle ACB = \angle DCE$

ఇంకా $\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{DC}{AC} = K$ (స్కేలు గుణకం)

అపుడు $\Delta ABC$, $\Delta DEC$ లు సరూపాలు అవుతాయి.

దీనినే మనం గుర్తులలో $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ అని వ్రాస్తాము.

('~' గుర్తును మనం 'సరూపము' అని చదువుతాము)

K అనేది స్కేలు గుణకం కావున

$K > 1$ అయిన పెద్దవి చేయబడిన పటాలు

$K = 1$ అయిన సర్వసమాన పటాలు

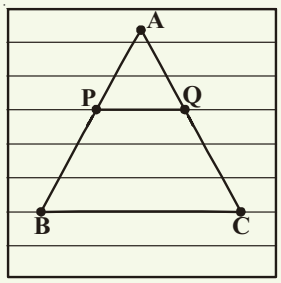
$K < 1$ అయిన చిన్నవి చేయబడిన పటాలు ఏర్పడతాయి.

ఇంకా $\Delta ABC$ మరియు $\Delta DEC$ లలో అనురూప కోణాలు సమానము. అందుకే వాటిని సమకోణీయ త్రిభుజములు అంటారు. రెండు సమకోణ త్రిభుజాలలో రెండు అనురూపభుజాల నిష్పత్తి యైనా ఒకేలా వుంటుంది. దీని నిరూపణకు ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము అవసరము. దీనినే మనము థేల్స్ సిద్ధాంతము అని కూడా అంటాము.

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము ?

ఈ ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము లేదా థేల్స్ సిద్ధాంతమును అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము.

**కృత్యము**




ఒక రూళ్ళ కాగితాన్ని తీసుకొని, దానిలో ఏదైనా ఒక గీతతో భూమి ఏకీభవించేటట్లు ఒక త్రిభుజాన్ని గీయండి. ఈ త్రిభుజము ABC అనేక గీతలను తాకుతూ వుంటుంది. ఈ గీతలలో ఏదైనా ఒక గీతను ఎంచుకొని అది త్రిభుజ భుజాలు AB, AC లను తాకు బిందువులకు P, Q అని పేరు పెట్టుము.

$\frac{AP}{PB}$, $\frac{AQ}{QC}$ నిష్పత్తులను కనుగొనుము. మీరు ఏమి గమనించారు? ఆ నిష్పత్తులు సమానంగా వుంటాయి. ఎందుకు? ఇది ఎప్పుడూ నిజమేనా? ఆ త్రిభుజమును తాకు వివిధ గీతలను తీసుకొని ప్రయత్నించుము. ఒక రూళ్ళ కాగితముపై అన్ని గీతలు సమాంతర రేఖలు అని మనకు తెలుసు. ఇంకా ప్రతీసారీ ఆ నిష్పత్తులు సమానంగా వుండటాన్ని మనం గమనించవచ్చును.

కావున $\Delta ABC$ లో, $PQ \parallel BC$ అయిన $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

ఇదే ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము యొక్క ఫలితము.

### 8.3.1 ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము (థేల్స్ సిద్ధాంతము)

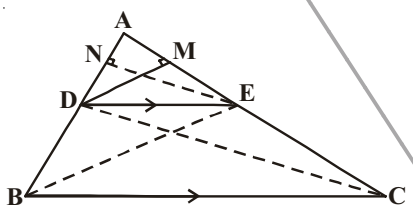
**సిద్ధాంతము-8.1 :** ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరువేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.

**దత్తాంశము :** $\Delta ABC$ లో $DE \parallel BC$, DE రేఖ AB, AC భుజాలను వరుసగా D మరియు E వద్ద ఖండించును.

**సారాంశము:** $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

**నిర్మాణము** : B, E మరియు C, D లను కలుపుము

మరియు $DM \perp AC$, $EN \perp AB$ గీయుము.




**ఉపపత్తి :** $\Delta ADE$ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

$\Delta BDE$ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times BD \times EN$

కావున $\dfrac{(\Delta ADE)\ \text{వైశాల్యము}}{(\Delta BDE)\ \text{వైశాల్యము}} = \dfrac{\frac{1}{2}\times AD\times EN}{\frac{1}{2}\times BD\times EN} = \dfrac{AD}{BD}$ ...(1)

మరల $\Delta ADE$ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\times AE\times DM$

$\Delta CDE$ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\times EC\times DM$

$$\frac{(\Delta ADE)\ \text{వైశాల్యము}}{(\Delta CDE)\ \text{వైశాల్యము}} = \frac{\frac{1}{2}\times AE\times DM}{\frac{1}{2}\times EC\times DM} = \frac{AE}{EC} \quad ...(2)$$

$\Delta BDE$, $\Delta CDE$ లు ఒకే భూమి DE మరియు సమాంతర రేఖలు BC మరియు DEల మధ్య వున్నట్లు గమనించవచ్చును. .

కావున $\Delta BDE$ వైశాల్యము $=$ $\Delta CDE$ వైశాల్యము ...(3)

(1), (2), (3) ల నుండి

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

కావున సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము కూడా సత్యమేనా ? దీనిని నిర్ధారించుకొనుటకు మరొక కృత్యాన్ని చేద్దాము.

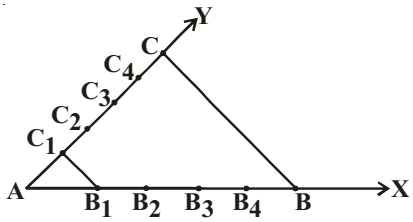
**కృత్యము**

మీ నోటు పుస్తకంలో కోణము XAY ని గీయండి. ఇంకా కిరణము AX పై $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$సెం.మీ (అనుకొనుము) వుండునట్లు బిందువులు $B_1, B_2, B_3, B_4$ మరియు B లను గుర్తించుము. అలాగే కిరణము AY పై , $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ సెం.మీ (అనుకొనుము) వుండునట్లు బిందువులు $C_1, C_2, C_3, C_4$ మరియు C లను గుర్తించుము.

$B_1$, $C_1$ మరియు B, C బిందువులను కలుపుము.

$\dfrac{AB_1}{B_1B} = \dfrac{AC_1}{C_1C} = \dfrac{1}{4}$ అని గమనించుము. మరియు $B_1C_1 \parallel BC$

అదే విధంగా $B_2C_2, B_3C_3$ మరియు $B_4C_4$ లను కలుపుము.




$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ మరియు $B_2C_2 \parallel BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ మరియు $B_3C_3 \parallel BC$

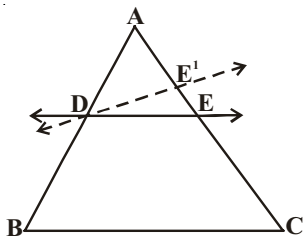
$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ మరియు $B_4C_4 \parallel BC$ అని మీరు చూడవచ్చును.

దీని నుండి ఈ క్రింది సిద్ధాంతము అనగా థేల్స్ సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయమును పొందవచ్చును.

**సిద్ధాంతము-8.2 :** ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా వుండును.

**దత్తాంశము :** $\Delta ABC$లో, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ అగునట్లు గీయబడిన సరళరేఖ DE.

**సారాంశము :** $DE \parallel BC$



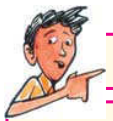

**ఉపపత్తి :** DE, BC కి సమాంతరము కాదు అనుకొనుము.

అపుడు BC కి సమాంతరంగా $DE^1$ ను గీయుము

అపుడు $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ఎందుకు ?)

$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ఎందుకు ?)

ఇరువైపులా '1' కలుపగా, E మరియు E′ లు తప్పనిసరిగా ఏకీభవించాలి అని తెలుస్తుంది. (ఎందుకు ?)



**ప్రయత్నించండి**

1. $\Delta PQR$ లో భుజాలు PQ మరియు PR లపై బిందువులు వరుసగా E మరియు F. ఈ క్రింది వాటిలో ప్రతి సందర్భంలో $EF \parallel QR$ అవునో, కాదో తెల్పండి.

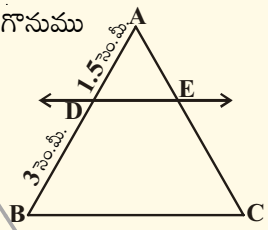
   (i) PE = 3.9 సెం.మీ EQ = 3 సెం.మీ PF = 3.6 సెం.మీ, FR = 2.4 సెం.మీ

   (ii) PE = 4 సెం.మీ, QE = 4.5 సెం.మీ, PF = 8 సెం.మీ, RF = 9 సెం.మీ.

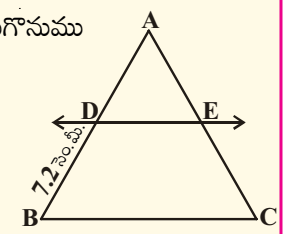
   (iii) PQ = 1.28 సెం.మీ PR = 2.56 సెం.మీ PE = 1.8 సెం.మీ, PF = 3.6 సెం.మీ.

2. ఈ క్రింది పటాలలో DE || BC.

(i) EC ని కనుగొనుము

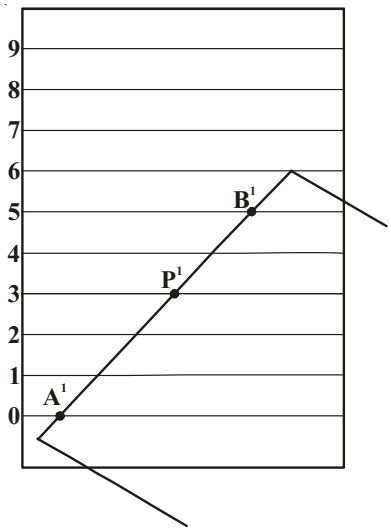



(ii) AD ని కనుగొనుము




**నిర్మాణము** : రేఖాఖండమును విభజించుట (థేల్స్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి)

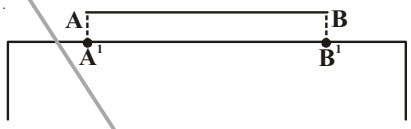
మాధురి ఒక రేఖాఖండమును గీసినది. దానిని 3 : 2 నిష్పత్తిలో విభజించాలనుకొంది. స్కేలు సహాయంతో ఆ రేఖాఖండమును కొలిచి దానిని కావలసిన నిష్పత్తిలో విభజించినది. ఇంతలో ఆమె అక్క వచ్చి ఆమెను ఆరేఖా ఖండమును కొలవకుండా కావలసిన నిష్పత్తిలో విభజించగలవా ? అని అడిగింది. కాని మాధురికి ఎలా చేయాలో తెలిఅయక వాళ్ళ అక్కనే చెప్పమని అడిగింది. అప్పుడు వాళ్ళ అక్క ఇలా చెప్పింది. మీరు కూడా ఈ కృత్యాన్ని చేయవచ్చును.




**కృత్యము**

ఒక రూళ్ళ కాగితమును తీసుకొనుము. అడుగున వున్న గీతకు '0' యిచ్చి అన్ని గీతలకు వరుసగా సంఖ్యలు 1, 2, 3, 4, ...అను వ్రాయుము.

ఒక దళసరి అట్టను తీసుకొని ఇచ్చిన రేఖాఖండము AB వెంబడి వుంచి, ఆ రేఖా ఖండము చివరలను అట్టపై గుర్తించుము. ఆ బిందువులను $A^1$, $B^1$ అని తీసుకొనుము.




ఇప్పుడు $A^1$ బిందువును రూళ్ళకాగితముపై 'O' రేఖ వద్ద వుంచి కార్డును $A^1$ చుట్టూ భ్రమణం చేస్తూ $B^1$ బిందువు 5వ రేఖపై వచ్చునట్లు చేయవలెను. (3 + 2).

అపుడు మూడవ రేఖ ఆ దళసరి అట్టను ఎక్కడ తాకునో ఆ బిందువును $P^1$ గా గుర్తించుము.

మరల ఈ అట్టను ఇచ్చిన రేఖాఖండము వెంబడి $A^1$ మరియు A, $B^1$ మరియు B లు ఏకీభవించునట్లు వుంచి, $P^1$ బిందువుకు అనుగుణంగా రేఖాఖండముపై 'P' బిందువును గుర్తించుము.

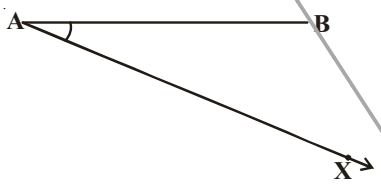
మనకు కావలసిన బిందువు 'P' . ఇది ఇచ్చిన రేఖా ఖండమును 3:2 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు.

యిపుడు ఈ నిర్మాణము ఎలా చేస్తారో నేర్చుకుందాము.

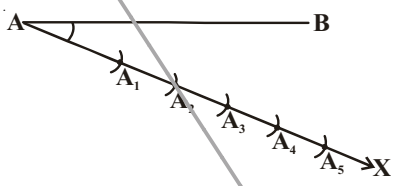
రేఖాఖండము AB ఇచ్చిన, దానిని మనం m : n నిష్పత్తిలో విభజించాలి. (m, n లు ధనపూర్ణ సంఖ్య) m = 3 మరియు n = 2 అనుకొనుము.

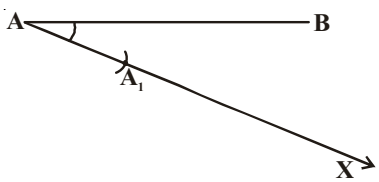
**సోపానాలు** :

1. రేఖా ఖండము AB తో అల్పకోణము చేయునట్లు కిరణము AX ను గీయుము.



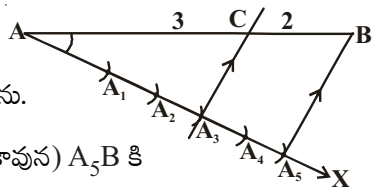
2. 'A' కేంద్రముగా ఏదైనా కొలతల కిరణము AX పై ఒక చాపమును గీయుము. చాపము, కిరణమును ఖండించిన బిందువు $A_1$.




3. $A_1$ కేంద్రంగా అదే కొలతతో మరల కిరణముపై చాపమును గీయుము. చాపము, కిరణమును ఖండించిన బిందువు $A_2$.

4. ఈ విధంగా 5 బిందువులను గుర్తించుము $(5 = m + n = 3+2)$ ఆ 5 బిందువులు $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ మరియు ఇవి $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ అయ్యేటట్లు వుండును.

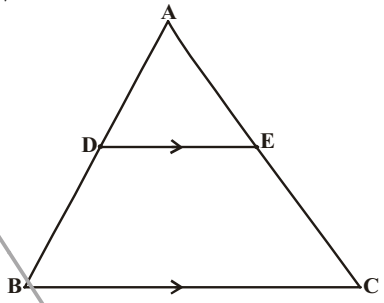



5. $A_5$, B బిందువులను కలుపుము. $A_3$ బిందువు గుండా $(m = 3$ కావున$)$ $A_5B$ కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయుము ($\angle A\,A_5B$ కి సమానమైన కోణము నిర్మించుట ద్వారా). ఇది AB ని C బిందువు వద్ద తాకును మరియు $AC : CB = 3 : 2$.

ఇపుడు మనం థేల్స్ సిద్ధాంతము మరియు దాని విపర్యయములపై కొన్ని ఉదాహరణలు చేద్దాం.

**ఉదాహరణ-1.** $\Delta ABC$ లో, $DE \parallel BC$ మరియు $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$.

$AC = 5.6$. అయిన AE విలువ ఎంత?




**సాధన :** $\Delta ABC$ లో, $DE \parallel BC$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నుండి)

కాని $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ కావున $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$

$AC = 5.6$ మరియు $AE : EC = 3 : 5$.

$$\frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AE}{5.6 - AE} = \frac{3}{5}$$ (అడ్డగుణకారం చేయగా)

$5AE = (3 \times 5.6) - 3AE$

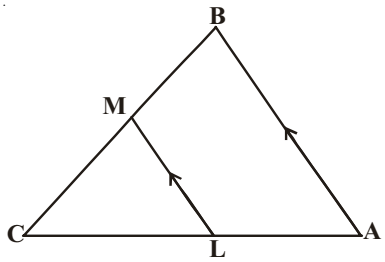
$8AE = 16.8$

$AE = \frac{16.8}{8} = 2.1$ సెం.మీ.

**ఉదాహరణ-2.** ఇచ్చిన పటంలో $LM \parallel AB$

$AL = x - 3,\ AC = 2x,\ BM = x - 2$

మరియు $BC = 2x + 3$ అయిన $x$ విలువను కనుగొనుము.




**సాధన :** $\Delta ABC$ లో, $LM \parallel AB$

$\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BM}{MC}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నుండి)

$\frac{x-3}{2x-(x-3)} = \frac{x-2}{(2x+3)-(x-2)}$

$\frac{x-3}{x+3} = \frac{x-2}{x+5}$ (అడ్డగుణకారం చేయగా)

$(x-3)(x+5) = (x-2)(x+3)$

$x^2 + 2x - 15 = x^2 + x - 6$

$\Rightarrow 2x - 15 = x - 6$

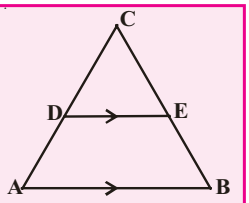
$x = 9$

## ఇవి చేయండి

1. ఇచ్చిన పటంలో $x$ యొక్క ఏ విలువ(లు)కు $DE \parallel AB$ అగును ?

   $AD = 8x + 9,\ CD = x + 3$

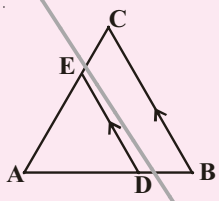
   $BE = 3x + 4,\ CE = x.$




2. $\Delta ABC$ లో $DE \parallel BC$. $AD = x,\ DB = x - 2,$

   $AE = x + 2$ మరియు $EC = x - 1.$

   అయిన $x$ విలువను కనుగొనుము.




**ఉదాహరణ-3.** ఒక చతుర్భుజము ABCD లో కర్ణములు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును మరియు $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అయిన అది ఒక ట్రాపీజియం అని చూపండి.

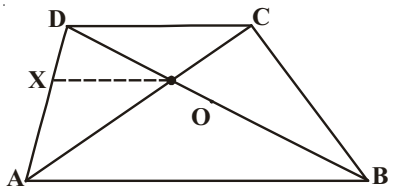
**సాధన : దత్తాంశము :** చతుర్భుజము ABCD లో, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

**సారాంశము :** ABCD ఒక ట్రాపీజియం.

**నిర్మాణము :** 'O' బిందువు గుండా ABకి సమాంతరంగా రేఖను గీసిన అది DA ను బిందువు 'X' వద్ద ఖండించును.

**ఉపపత్తి :** $\Delta DAB$లో, $XO \parallel AB$ (నిర్మాణము నుండి)

$\Rightarrow \frac{DX}{XA} = \frac{DO}{OB}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నుండి)




$\frac{AX}{XD} = \frac{BO}{OD}$ ..... (1)

మరల $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (దత్తాంశము)

$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{OD}$ ..... (2)

(1) (2) ల నుండి

$\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{CO}$

$\Delta ADC$ లో, $\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{OC}$ అగునట్లు XO రేఖ వున్నది

$\Rightarrow$ XO || DC (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము విపర్యయము నుండి)

$\Rightarrow$ AB || DC

చతుర్భుజము ABCD లో, AB || DC

$\Rightarrow$ ABCD ఒక ట్రెపీజియం (నిర్వచనం ప్రకారం)

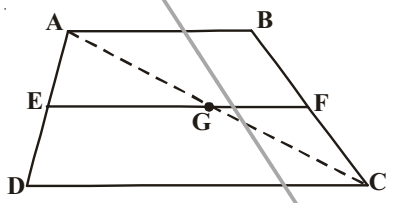
కావున రుజువు చేయబడినది.

**ఉదాహరణ-4.** ట్రెపీజియం ABCDలో, AB || DC. E మరియు F బిందువులు వరుసగా EF || AB అగునట్లు, సమాంతరం కాని భుజాలు AD, BC లపై నున్నవి. అయిన $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ అని చూపండి.

**సాధన :** A, C బిందువులను కలుపగా ఏర్పడిన రేఖాఖండము EF ను G వద్ద ఖండించినది.

AB || DC మరియు EF || AB (దత్తాంశము)

$\Rightarrow$ EF || DC (ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా నున్న రేఖలు సమాంతరాలు)




$\Delta ADC$ లో, EG || DC

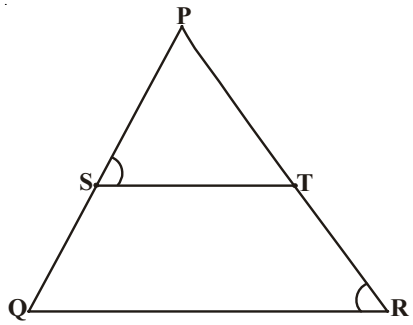
కావున $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత ప్రకారం) ...(1)

అదేవిధంగా, $\Delta CAB$ లో, GF || AB

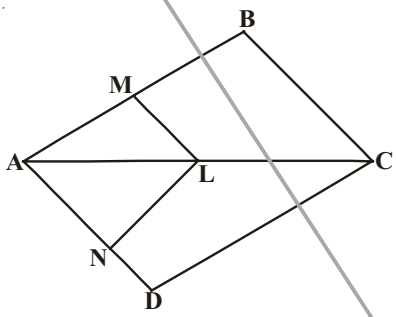
$\frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FB}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత ప్రకారం) అనగా $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ...(2)

(1), (2) ల నుండి, $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

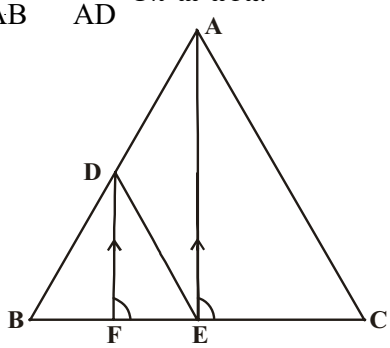
## అభ్యాసము - 8.1



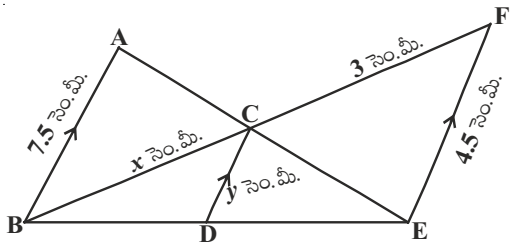

1. $\Delta PQR$ లో $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ అగునట్లు ST ఒక సరళరేఖ. ఇంకనూ $\angle PST = \angle PRQ$. అయిన $\Delta PQR$ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.




2. ఇచ్చిన పటంలో, LM || CB మరియు LN || CD అయిన $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ అని చూపండి.




3. ఇచ్చిన పటంలో, DE || AC మరియు DF || AE అయిన $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ అని చూపండి.

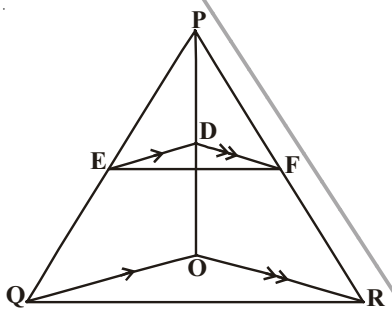



4. ఇచ్చిన పటంలో, AB || CD || EF.
AB = 7.5 సెం.మీ DC = y సెం.మీ
EF = 4.5 సెం.మీ, BC = $x$ సెం.మీ.
అయిన $x$ , $y$ విలువలను కనుగొనండి.

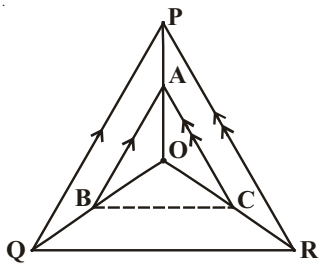
5. ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము మధ్య బిందువు గుండా పోయేరేఖ, రెండవ భుజానికి సమాంతరంగా వుంటే అది మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి. (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నుపయోగించి)

6. ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా వుంటుందని చూపండి. (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము నుపయోగించి)

7. ఇచ్చిన పటములో, DE || OQ మరియు DF || OR అయిన EF || QR అని చూపండి.



8. ప్రక్క పటంలో A, B, C లు వరుసగా OP, OQ మరియు OR లపై బిందువులు. AB || PQ మరియు AC||PR అయిన BC || QR అని చూపండి.




9. ట్రెపీజియం ABCD లో AB||DC. దాని కర్ణములు పరస్పరం బిందువు 'O' వద్ద ఖండించుకొంటాయి. అయిన $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అని చూపండి.

10. 7.2 సెం.మీ పొడవు గల ఒక రేఖాఖండమును గీసి దానిని 5 : 3 నిష్పత్తిలో విభజించండి. ఏర్పడిన రెండు భాగముల పొడవులను కొలిచి రాయండి.

**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి**

త్రిభుజముల సరూపత అనేది మిగిలిన బహుభుజుల సరూపత కంటే ఏవిధంగా భిన్నమైనదో మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

## 8.4 త్రిభుజాల సరూపత నియమాలు

రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావాలంటే వాటి అనురూపకోణాలు సమానంగా వుండాలి మరియు అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో వుండాలి అని మనకు తెలుసును. రెండు త్రిభుజాల సరూపకతను పరిశీలించడానికి అనురూప కోణాలు సమానంగా వున్నాయేమో పరిశీలించాలి ఇంకా అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానమేమో పరిశీలించాలి. రెండు త్రిభుజాల సరూపకతను పరిశీలించడానికి కొన్ని నియమాలను ఏర్పరచే ప్రయత్నము చేద్దాము. ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేయండి.

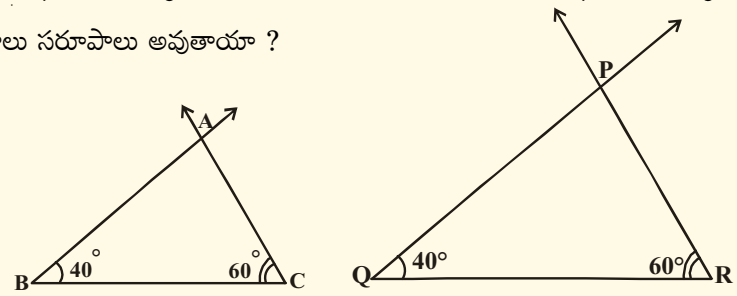
**కృత్యము**

ఒక కోణ మానిని మరియు స్కేలును ఉపయోగించి సర్వసమానము కాని రెండు త్రిభుజాలను గీయండి. ప్రతీ త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు 40° మరియు 60° వుండాలి. ప్రతీ త్రిభుజములోని మూడవకోణము కొలతను పరిశీలించండి.

అది 80° ఉంటుంది (ఎందుకు?)

ఇపుడు త్రిభుజ భుజాల పొడవులు కనుగొని వాటి సహాయంతో అనురూప భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి కనుగొనండి.

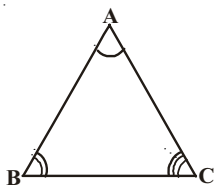
ఈ త్రిభుజాలు సరూపాలు అవుతాయా ?




ఈ కృత్యము ద్వారా త్రిభుజాల సరూపతకు మనం ఈ క్రింది నియమాన్ని చెప్పవచ్చును.

### 8.4.1 త్రిభుజాల సరూపకతకు కో.కో.కో నియమము

**సిద్ధాంతము-8.3 :** రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానంగా వుంటే, వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగా వుంటాయి. (అనుపాతంలో వుంటాయి). ఇంకా ఆ రెండు భుజాలు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి.

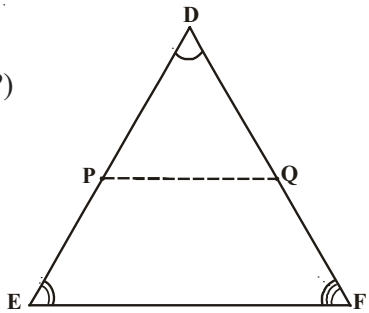



**దత్తాంశము** : $\Delta ABC$, $\Delta DEF$ లలో,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

**సారాంశము** : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

**నిర్మాణము :** $AB = DP$ మరియు $AC = DQ$ అగునట్లు DE మరియు DF లపై వరుసగా బిందువులు P మరియు Q లను గుర్తించుము. P, Q లను కలుపుము.




**ఉపపత్తి :** $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎందుకు ?)

దీని నుండి $\angle B = \angle P = \angle E$ మరియు $PQ \parallel EF$ (ఎలా ?)

$\therefore \frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (ఎందుకు ?)

అనగా $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ఎందుకు ?)

అదేవిధంగా $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ కాబట్టి $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

**గమనిక :** ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజము లోని రెండు కోణములకు సమానమైన, త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం, ఆరెండు త్రిభుజాలలోని మూడవ కోణాలు కూడా సమానము అవుతాయి.

దీని నుండి కో.కో. సరూప నియమాన్ని ఈ విధంగా చెబుతాము. ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

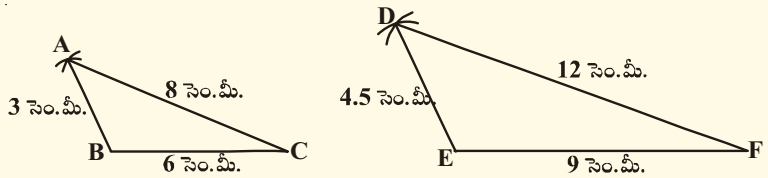
మరి పై ప్రవచనము యొక్క విపర్యయము ఏమిటి?

ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని అనురూపభుజాలతో అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానమనుట సరియేనా ?

దీనిని మనము ఈ క్రింది కృత్యము ద్వారా పరిశీలిద్దాము.

**కృత్యము**

AB = 3 సెం.మీ, BC = 6 సెం.మీ, CA = 8 సెం.మీ కొలతలతో $\Delta ABC$ని, DE = 4.5 సెం.మీ, EF = 9 సెం.మీ, FD = 12 సెం.మీ కొలతలతో $\Delta DEF$ ను నిర్మించుము.



ఆ రెండు త్రిభుజాలలో $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{2}{3}$.

ఇప్పుడు ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని కోణాలను కోణమానినితో కొలిచిన, మీరు ఏమి గమనిస్తారు? వాటి అనురూప కోణాల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? అవి సమానాలు కదా, యింకా రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. వివిధ త్రిభుజాలను గీసి ఈ ఫలితాన్ని మీరు సరిచూడవచ్చును.

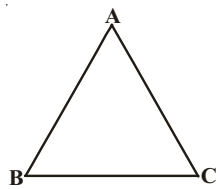
పై కృత్యము ద్వారా త్రిభుజాల సరూపకతకు సంబంధించి ఈ క్రింది నియమాన్ని చెప్పవచ్చును.

### 8.4.2. త్రిభుజాల సరూపకతకు భు.భు.భు. నియమము

**సిద్ధాంతము-8.4 :** రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానము ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

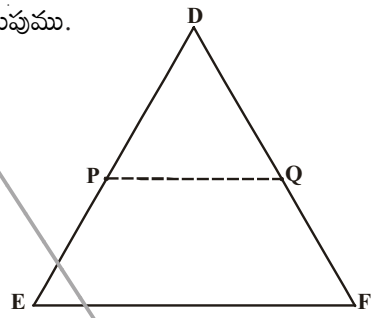
**దత్తాంశము :** $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ $(<1)$ అగునట్లు

$\Delta ABC$ మరియు $\Delta DEF$ లను తీసుకొనుము.




**సారాంశము :** $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

**నిర్మాణము :** $AB = DP$ మరియు $AC = DQ$ అగునట్లు DE, DF లపై వరుసగా P మరియు Q బిందువులను గుర్తించుము. P,Q లను కలుపుము.




**ఉపపత్తి :** $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ మరియు $PQ \parallel EF$ (ఎందుకు ?)

కావున $\angle P = \angle E$ మరియు $\angle Q = \angle F$ (ఎందుకు ?)

$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

కాని $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (ఎందుకు ?)

కాని $BC = PQ$ (ఎందుకు ?)

$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎందుకు ?)

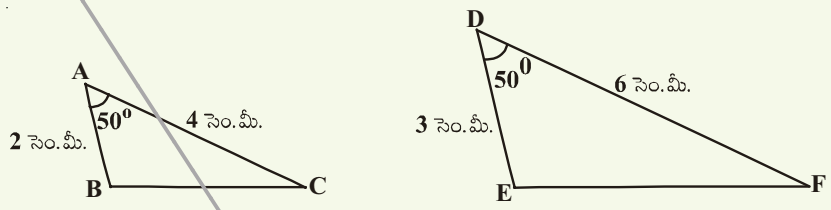
కావున $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ (ఎలా ?)

బహుభుజుల సరూపకతకు సంబంధించి ఒక్క నియమం సరిపోదని మనం చదివాము. కాని త్రిభుజాల సరూపకతకు సంబంధించి రెండు నియమాలు అవసరం లేదు. ఎందుకంటే ఒక నియమం వుంటే రెండవ నియమం వున్నట్లే. ఇపుడు మనం భు.కో.భు. సరూపనియమాన్ని నేర్చుకుందాం. దాని కొరకు ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము.

**కృత్యము**

$AB = 2$ సెం.మీ, $\angle A = 50^0$ $AC = 4$ సెం.మీ.

వుండునట్లు $\Delta ABC$ని $DE = 3$ సెం.మీ., $\angle D = 50^0$, $DF = 6$ సెం.మీ. వుండునట్లు $\Delta DEF$ ను గీయుము.




$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$ మరియు $\angle A = \angle D = 50^0$ అని పరిశీలించుము.

ఇపుడు $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$, $\angle F$ లను మరియు $BC$, $EF$ లను కొలుచుము.

$\angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$ ఇంకా $\frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$ అని పరిశీలించవచ్చును.

కావున ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. వివిధ కొలతలు గల త్రిభుజాలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి. దీని నుండి త్రిభుజాల సరూపకతకు సంబంధించి క్రింది నియమం వస్తుంది.

### 8.4.3 త్రిభుజాల సరూపకతకు భు.కో.భు నియమము

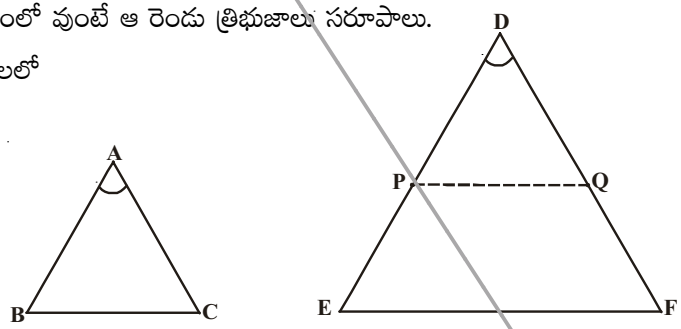
**సిద్ధాంతము-8.5 :** ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణమునకు సమానమై, ఈ కోణాలను కలిగి వున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

**దత్తాంశము :** $\Delta ABC$ మరియు $\Delta DEF$ లలో

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ $(<1)$ మరియు

$\angle A = \angle D$

**సారాంశము :** $\Delta ABC \sim \Delta DEF$




**నిర్మాణము :** $AB = DP$ మరియు $AC = DQ$ అగునట్లు $DE$, $DF$ భుజాలపై వరుసగా $P$, $Q$ బిందువులను గుర్తించుము. $P$, $Q$ లను కలుపుము.

**ఉపపత్తి :** $PQ \parallel EF$ మరియు $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ఎలా ?)

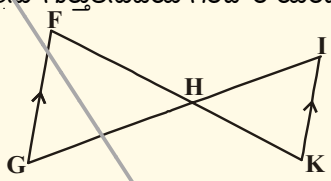
కావున $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle Q$

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ఎందుకు ?)

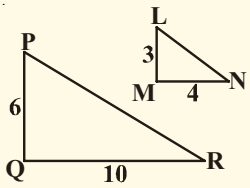
## ప్రయత్నించండి.

1. క్రింది త్రిభుజాలు సరూపాలా ? సరూపాలయితే ఏ నియమం ఆధారంగానో వివరించండి. త్రిభుజాల సరూపకతను గుర్తులనుపయోగించి రాయండి.

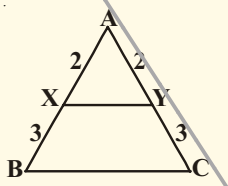
(i)



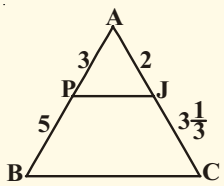

(ii)



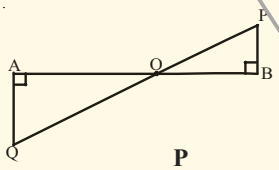

(iii)



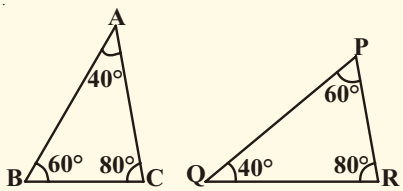

(iv)



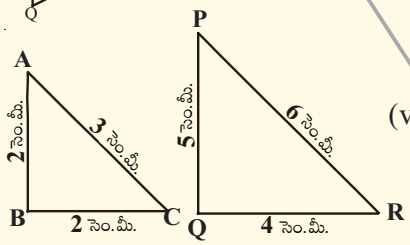

(v)



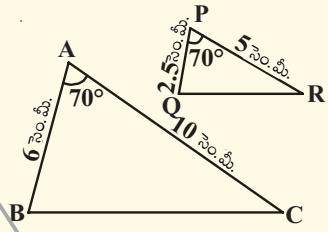

(vi)




(vii)

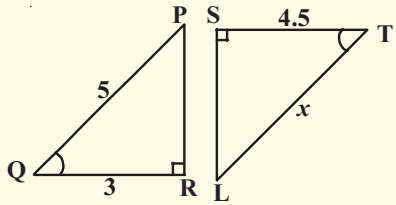



(viii)

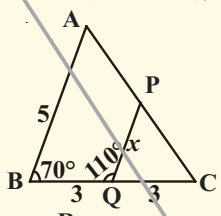



2. ఈ క్రింది త్రిభుజాలు ఎందుకు సరూపాలో వివరించి అపుడు '$x$' విలువను కనుగొనండి.

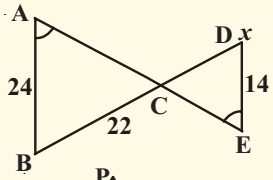
(i)



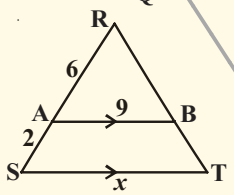

(ii)



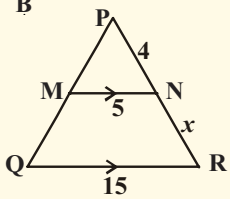

(iii)



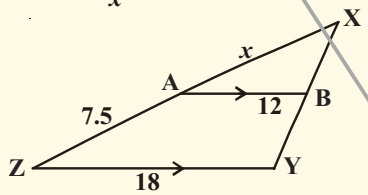

(iv)



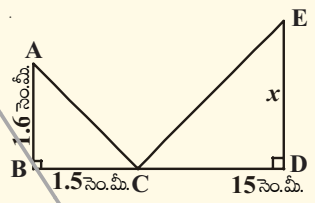

(v)



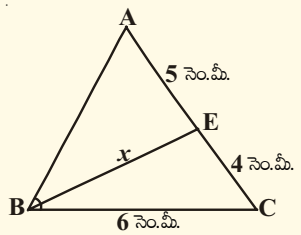

(vi)



(vii)



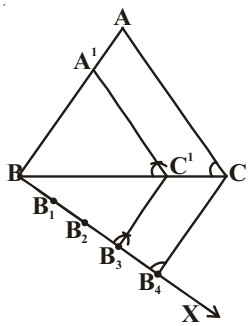

(viii)




**నిర్మాణము :** ఇచ్చిన స్కేలు ప్రకారము ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపంగా వుండేటట్లు త్రిభుజాన్ని నిర్మించడము.

a) ఇచ్చిన త్రిభుజము ABC కి సరూపంగా వుంటూ, $\Delta ABC$ భుజాలలో $\frac{3}{4}$ వంతు వుండేటట్లు అనురూప భుజాలు కలిగిన త్రిభుజమును నిర్మించుము. (స్కేలు గుణకము $\frac{3}{4}$)

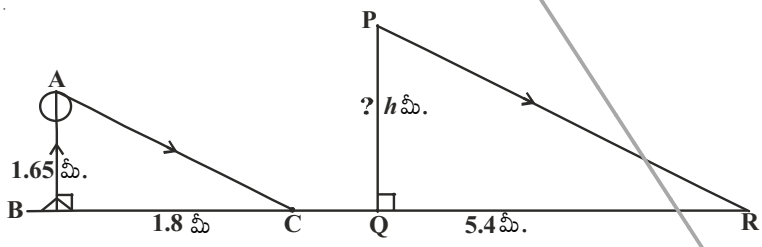
**సోపానములు** 1.BC భుజానికి శీర్షము A వున్న వైపుకు వ్యతిరేఖదిశలో దానితో అల్పకోణము చేయునట్లు BX కిరణమును గీయము.




2. ఈ BX పై $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ అగునట్లు నాలుగు బిందువులు $B_1, B_2, B_3, B_4$ లను గుర్తించుము.
3. $B_4C$ ని కలుపుము. $B_3$ గుండా $B_4C$ కి సమాంతరంగా వుండేటట్లు రేఖను గీసిన అది BC ని $C'$ వద్ద ఖండించును.
4. $C'$ గుండా CA కు సమాంతరంగా గీసిన రేఖ BA ను $A'$. వద్ద ఖండించును. కావున $\Delta A'BC'$ మనకు కావలసిన త్రిభుజము.

ఈ సరూప త్రిభుజాల నియమాలనుపయోగించుకొనే మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

**ఉదాహరణ-5.** 1.65మీ పొడవు గల ఒక వ్యక్తి నీడ పొడవు 1.8 మీ. అదే సమయంలో, ఒక దీపస్తంభము 5.4 మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచిన, ఆ దీప స్తంభము పొడవు ఎంత?




**సాధన:** $\Delta ABC$ మరియు $\Delta PQR$ లలో

$\angle B = \angle Q = 90^0$.

$\angle C = \angle R$ ($AC \parallel PR$, ఏ సమయంలోనైనా సూర్యకిరణాలు సమాంతరాలు)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (కోకో సరూపనియమం ప్రకారం)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (సరూపత్రిభుజాల అనురూపభుజాలు)

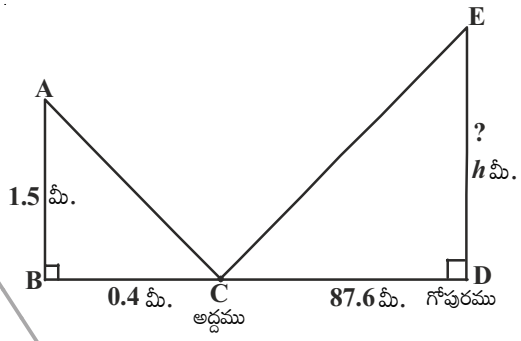
$$\frac{1.65}{PQ} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$PQ = \frac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95m$$

ఆ దీప స్తంభము ఎత్తు 4.95మీ.

**ఉదాహరణ-6.** ఒక గోపురము నుండి 87.6 మీటర్ల దూరములో వుంచిన అద్దములో ఒక వ్యక్తి గోపుర శిఖరమును చూసెను. అద్దము నేలపై ఊర్ధ్వ దిశలో వుంచబడినది మరియు ఆ వ్యక్తి అద్దము నుండి 0.4మీ దూరములో వున్నాడు. అతని కంటి చూపు భూమి నుండి 1.5 మీటర్ల ఎత్తులో నున్న ఆ గోపురము ఎత్తును కనుగొనుము.

**సాధన :** $\Delta ABC$ మరియు $\Delta EDC$ లలో




$\angle ABC = \angle EDC = 90°$

$\angle BCA = \angle DCE$ (పతన కోణము మరియు పరావర్తన కోణములు సమానము)

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (కోకో సరూప నియమం)

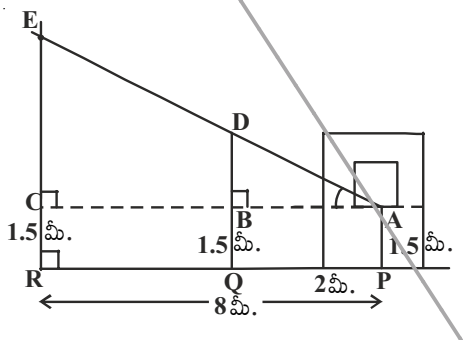
$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1.5}{h} = \frac{0.4}{87.6}$$

$$h = \frac{1.5 \times 87.6}{0.4} = 328.5 \text{ మీ.}$$

కావున, ఆగోపురము ఎత్తు 328.5మీ.

**ఉదాహరణ7.** గోపాల్ తన ఇంటి హాలు ప్రక్క అపార్టుమెంటు పై అంతస్థులోని కిటికీ వద్ద నిలుచునే వ్యక్తులకు ఎప్పుడూ కనిపిస్తూ వుంటోందని ఆందోళన పడుతున్నాడు. దాని కొరకు వారికి కనిపించకుండా వుండేటందుకు తన యింటి ప్రహారి గోడ ఎత్తు పెంచాలను కొన్నాడు. కొలతలు పటంలో ఈయబడ్డాయి. ప్రహరి గోడను ఎంత ఎత్తు వరకు నిర్మించాలి ?

**సాధన :** $\Delta ABD$ మరియు $\Delta ACE$ లలో




$\angle B = \angle C = 90°$

$\angle A = \angle A$ (ఉమ్మడికోణం)

$\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (కోకో సరూపనియమం)

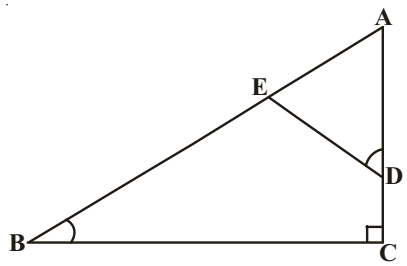
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BD}{1.2}$$

$$BD = \frac{2 \times 1.2}{8} = \frac{2.4}{8} = 0.3\text{మీ}$$

ప్రహరిగోడ కావలసిన ఎత్తు = 1.5 మీ + 0.3 మీ

1.8 మీ ఎత్తు నిర్మించిన, ప్రహరీగోడ హాలు ప్రక్క యింటి వారికి కన్పించకుండా చేయవచ్చును.

## అభ్యాసము - 8.2




1. ఇచ్చిన పటంలో, $\angle ADE = \angle B$

   (i) $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ అని చూపండి.

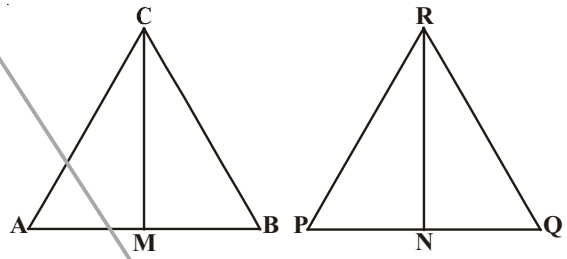
   (ii) AD = 3.8 సెం.మీ, AE = 3.6 సెం.మీ

   BE = 2.1 సెం.మీ BC = 4.2 సెం.మీ

   అయిన DE పొడవును కనుగొనండి.

2. రెండు సరూప త్రిభుజాల చుట్టు కొలతలు వరుసగా 30 సెం.మీ మరియు 20 సెం.మీ మొదటి త్రిభుజములోని ఒక భుజము కొలత 12 సెం.మీ అయిన రెండవ త్రిభుజములో దాని అనురూపభుజము కొలతను కనుగొనండి.

3. 90 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక బాలిక దీపస్తంభము నుండి దూరముగా 1.2 మీ/సె. వేగముతో నడుచుచున్నది. దీప స్తంభము ఎత్తు 3.6 మీ అయిన 4 సెంకడ్ల తరువాత ఏర్పడే ఆ బాలిక నీడ పొడవును కనుగొనుము.



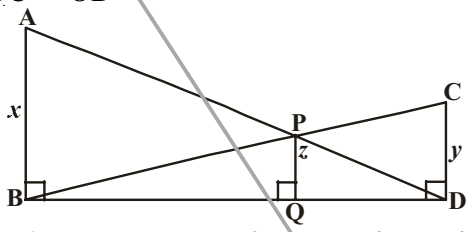

4. CM మరియు RN లు వరుసగా $\Delta ABC$ మరియు $\Delta PQR$ లలో గీయబడిన మధ్యగత రేఖలు. అయిన

   (i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

   (ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$

   (iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ అని చూపండి.

5. ట్రెపీజియం ABCDలో AB || DC. కర్ణములు AC మరియు BD లు బిందువు 'O' వద్ద ఖండించుకొనును. త్రిభుజముల సరూప నియమాలను పయోగించుకొని $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ అని చూపండి.




6. AB, CD, PQ లు BD కి గీసిన లంబాలు. AB = x, CD = y మరియు PQ = Z అయిన $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ అని చూపండి.

7. 4మీ. పొడవు గల ఒక జెండా స్తంభము 6 మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచును. అదే సమయంలో దగ్గరలో గల ఒక భవనం 24మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచిన, ఆ భవనము ఎత్తు ఎంత?

8. ABC మరియు FEG త్రిభుజాలలో AB మరియు FE భుజాలపై D మరియు H బిందువులు వరుసగా ఏర్పడునట్లు $\angle ACB$ మరియు $\angle EGF$ లకు గీసిన కోణ సమద్విఖండన రేఖలు వరుసగా CD మరియు GHలు. ఇంకా $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ అయిన

   (i) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AC}{FG}$ అని చూపండి. (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGF$ (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

9. $\Delta ABC$ మరియు $\Delta DEF$ సరూపత్రిభుజాలలో గీసిన లంబాలు AX మరియు DY అయిన AX : DY = AB : DE అని నిరూపించండి.

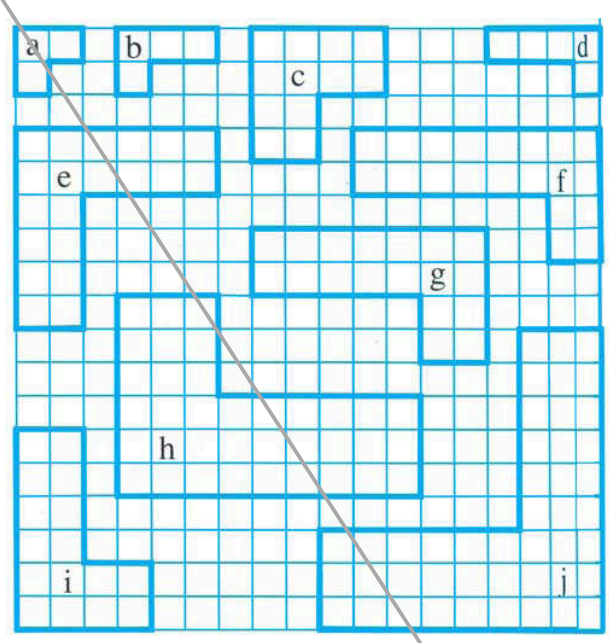
10. ఇచ్చిన త్రిభుజము ABCకి సరూపంగా వుంటూ, దాని భుజాలకు $\frac{5}{3}$ రెట్లు వుండే అనురూప భుజాలు కలిగిన త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

11. 4సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 6 సెం.మీ. కొలతలతో ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. దీనితో సరూపంగా వుంటూ ఈ త్రిభుజ భుజాలకు $\frac{2}{3}$ రెట్లు అనురూప భుజాల కొలతలు కలిగిన త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

12. భూమి 8 సెం.మీ మరియు దానికి గీసిన లంబము 4 సెం.మీ. వుండునట్లు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమును గీయండి. ఈ త్రిభుజభుజాలకు $1\frac{1}{2}$ రెట్లు అనురూప భుజాల పొడవులు కలిగి యిచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపంగా వుండేటట్లు వేరొక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

## 8.5 సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాలు

రెండు సరూప త్రిభుజాలకు వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానం. మరి ఈ అనురూప భుజాల నిష్పత్తికి, వాటి వైశాల్యాలకు ఏదైనా సంబంధము వుందని నీవు భావిస్తున్నావా? ఇది అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము.




**కృత్యము :** ఇచ్చిన పటంలో సరూప బహుభుజుల జతలను ఒక జాబితాగా తయారుచేయండి.

వాటి

(i) సరూపకత నిష్పత్తిని

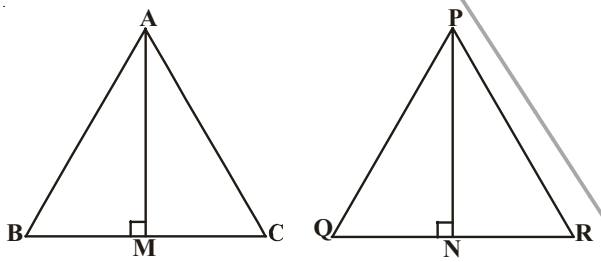
(ii) వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

వైశాల్యాల నిష్పత్తి, వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తికి వర్గమని మీరు గమనిస్తారు.

దీనిని మనం ఈ క్రింది విధంగా సిద్ధాంతంలా నిరూపించవచ్చును.

**సిద్ధాంతము-8.6 :** రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి వర్గమునకు సమానము.

**దత్తాంశము :** $\Delta ABC \sim \Delta PQR$



**సారాంశము :** $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{RP}\right)^2$.

**నిర్మాణము:** $AM \perp BC$ మరియు $PN \perp QR$ గీయండి.

**ఉపపత్తి :** $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \dfrac{\frac{1}{2}\times BC\times AM}{\frac{1}{2}\times QR\times PN} = \dfrac{BC\times AM}{QR\times PN}$ ...(1)

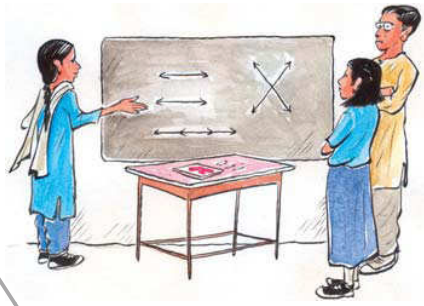
$\Delta ABM$ మరియు $\Delta PQN$ లలో

$\angle B = \angle Q$ ($\because \Delta ABC \sim \Delta PQR$)

$\angle M = \angle N = 90^0$

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQN$ (కో.కో.సరూపనియమం)

$\dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AB}{PQ}$ ...(2)



ఇంకా $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (దత్తాంశము)

$\boxed{\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}} = \dfrac{AC}{PR}$ ...(3)

$\therefore \dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \dfrac{AB}{PQ}\times\dfrac{AB}{PQ}$ (1), (2), (3) ల నుండి

$= \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2$.

సమీకరణము (3) నుండి

$\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$

సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

ఇప్పుడు మనం కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

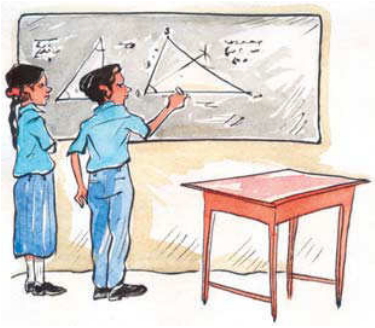
**ఉదాహరణ-8.** రెండు సరూపత్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమైన అవి సర్వసమాన త్రిభుజాలని చూపండి.

**సాధన :** $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

కావున $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$

కాని $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యము}} = 1$ ($\because$ వైశాల్యాలు సమానము కావున)

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$$



కావున $AB^2 = PQ^2$

$BC^2 = QR^2$

$AC^2 = PR^2$

దీని నుండి మనకు $AB = PQ$

$BC = QR$

$AC = PR$ లభిస్తుంది

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (భు.భు.భు. సర్వసమాన నియమం)

**ఉదాహరణ-9.** $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ మరియు వాటి వైశాల్యాలు వరుసగా 64 చ.సెం.మీ మరియు 121 సెం.మీ. ఇంకా $EF = 15.4$ సెం.మీ అయిన BC కొలతను కనుగొనుము.

**సాధన :** $\dfrac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యము}}{\Delta DEF \text{ వైశాల్యము}} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4} \Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2 \text{ సెం.మీ.}$$

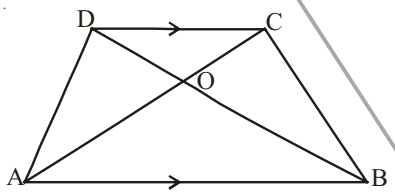
**ఉదాహరణ-10.** ట్రాపీజియం ABCD లో $AB \parallel DC$. ఇంకా కర్ణములు AC, BD లు 'O' వద్ద ఖండించుకొంటాయి. $AB = 2CD$ అయిన త్రిభుజములు AOB మరియు CODల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

**సాధన :** ట్రాపీజియం ABCDలో $AB \parallel DC$ ఇంకా $AB = 2CD$.

$\Delta AOB$, $\Delta COD$ లలో

$\angle AOB = \angle COD$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$\angle OAB = \angle OCD$ (ఏకాంతర కోణాలు)



$\Delta AOB \sim \Delta COD$ (కోకో సరూప నియమం)

$$\frac{\Delta\ AOB \text{ వైశాల్యము}}{\Delta\ COD \text{ వైశాల్యము}} = \frac{AB^2}{DC^2}$$

$$= \frac{(2DC)^2}{(DC)^2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore$ $\Delta AOB$ వైశాల్యము : $\Delta COD$ వైశాల్యము = 4 : 1.

## అభ్యాసము - 8.3

1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము మూడు భుజాలపై సమబాహు త్రిభుజాలు గీయబడ్డాయి. కర్ణము మీద గీసిన త్రిభుజవైశాల్యము మిగిలిన రెండు భుజాల మీద గీసిన త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తమునకు సమానమని చూపండి.
2. ఒక చతురస్రము భుజముపై గీసిన సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యము, ఆ చతురస్ర కర్ణముపై గీసిన సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యములో సగము వుంటుందని చూపండి.
3. $\Delta ABC$ లో BC, CA, AB భుజాల మధ్యబిందువులు వరుసగా D, E, F . అయిన $\Delta DEF$ మరియు $\Delta ABC$ల వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
4. $\Delta ABC$లో, $XY \parallel AC$ మరియు XY ఆ త్రిభుజాన్ని రెండు సమాన వైశాల్యాలు కల భాగాలుగా విభజించును. అయిన $\frac{AX}{XB}$ నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
5. రెండు సరూపత్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప మధ్యగతాల నిష్పత్తి వర్గానికి సమానమని చూపండి.
6. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. BC = 3 సెం.మీ EF = 4 సెం.మీ $\Delta ABC$ వైశాల్యము = 54 చ.సెం.మీ అయిన $\Delta DEF$ వైశాల్యమును కనుగొనుము.
7. త్రిభుజము ABCలో AB భుజాన్ని P వద్ద, AC ని Q వద్ద తాకునట్లు PQ ఒక సరళరేఖ, ఇంకా AP = 1 సెం.మీ., BP = 3సెం.మీ. AQ = 1.5సెం.మీ. CQ = 4.5సెం.మీ. అయిన

   $\Delta APQ$ వైశాల్యము = $\frac{1}{16}$($\Delta ABC$ వైశాల్యము) అని చూపండి.
8. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాలు 81 చ.సెం.మీ మరియు 49 చ.సెం.మీ పెద్ద త్రిభుజములో గీసిన లంబము పొడవు 4.5 సెం.మీ అయిన చిన్న త్రిభుజములో దాని అనురూప లంబము పొడవును కనుగొనండి.

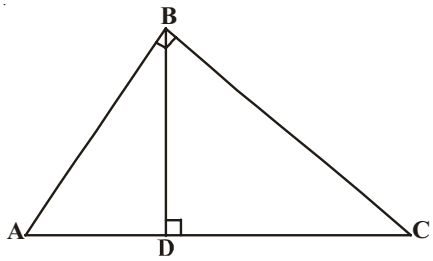
## 8.6 పైథాగరస్ సిద్ధాంతము

మీకు పైథాగరస్ సిద్ధాంతము గురించి బాగా తెలుసును. దీనిని మీరు కొన్ని కృత్యముల ద్వారా సరిచూసి వున్నారు. సరూపత్రిభుజాల భావన నుపయోగించుకొని ఈ సిద్ధాంతాన్ని మనం రుజువు చేద్దాము. దాని కొరకు మనం ఈ క్రింది ఫలితాన్ని ఉపయోగించుకొంటాము.

**సిద్ధాంతము-8.7 :** ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో, లంబకోణము కలిగిన శీర్షము నుండి కర్ణానికి లంబము గీసిన, ఆ లంబానికి ఇరువైపులా ఏర్పడిన త్రిభుజాలు, ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపాలు మరియు అవి ఒకదానికొకటి కూడా సరూపాలు.

**ఉపపత్తి :** ABC లంబకోణ త్రిభుజములో, లంబకోణము కలలిగిన శీర్షము B.

B నుండి కర్ణము AC కి గీసిన లంబము BD.




$\Delta ADB$ మరియు $\Delta ABC$ లలో

$\angle A = \angle A$

మరియు $\angle ADB = \angle ABC$ (ఎందుకు ?)

కావున $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (ఎలా ?) ...(1)

అదేవిధంగా, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (ఎలా ?) ...(2)

(1), (2) ల నుండి లంబము BD కి ఇరువైపులా నున్న త్రిభుజాలు మొత్తము త్రిభుజము $\Delta ABC$కి సరూపాలు.

ఇంకా $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

కావున $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

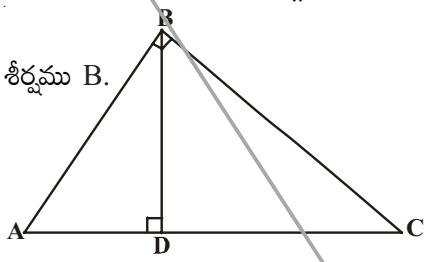
ఇది ఈ క్రింది సిద్ధాంతానికి దారి తీస్తుంది.

**ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.**

ఒక లంబకోణ త్రిభుజము మూడు భుజాల కొలతలు పూర్ణ సంఖ్యలైనపుడు కనీసము ఒకటి తప్పనిసరిగా సరిసంఖ్య అవుతుంది. ఎందుకు ? మీ మిత్రులతో మరియు ఉపాధ్యాయులతో చర్చించుము.

### 8.6.1 బౌధాయన సిద్ధాంతము (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

**సిద్ధాంతం-8.8 :** ఒక లంబ కోణ త్రిభుజములో కర్ణము మీది వర్గము, మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం.




**దత్తాంశము**: లంబకోణ త్రిభుజము ABCలో లంబకోణాన్ని కలిగిన శీర్షము B.

**సారాంశము** : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

**నిర్మాణము** : $BD \perp AC$ గీయుము.

**ఉపపత్తి** : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$ (భుజాలు అనుపాతంలో వుంటాయి)

$AD \,.\, AC = AB^2$ ...(1)

ఇంకా, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$CD \cdot AC = BC^2$ ...(2)

(1), (2) లను కలుపగా

$AD \cdot AC + CD \cdot AC = AB^2 + BC^2$

$AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

$AC \cdot AC = AB^2 + BC^2$

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

ఈ సిద్ధాంతమును ప్రాచీన భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్త బౌధాయనుడు (సుమారు క్రీ.పూ 800) ఈ క్రింది రూపములో చెప్పెను.

"ఒక దీర్ఘ చతురస్ర కర్ణము దానితో అది ఏర్పరచిన వైశాల్యము దాని రెండు భుజాలు (అనగా పొడవు మరియు వెడల్పులు) ఏర్పరచిన వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం. అందుకే దీనిని మనం బౌధాయన సిద్ధాంతముగా పేర్కొనడం జరిగింది.

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము ఏమిటి ? దానిని కూడా మనం ఒక సిద్ధాంతములా రుజువు చేద్దాము.

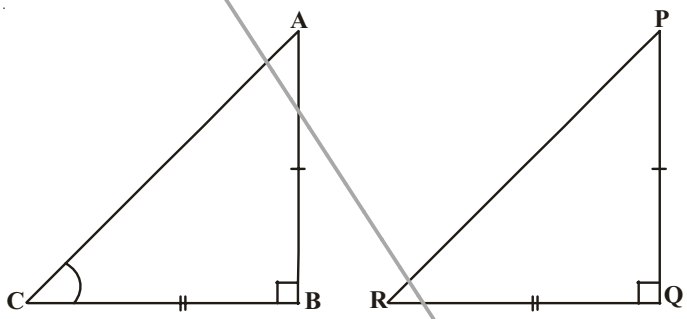
**సిద్ధాంతం-8.9 :** ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైన, మొదటి భుజానికి ఎదురుగా వుండే కోణము లంబకోణము అనగా ఆ త్రిభుజము లంబ కోణ త్రిభుజమవుతుంది.

**దత్తాంశము** : $\Delta ABC$ లో,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

**సారాంశము :** $\angle B = 90^0$.

**నిర్మాణము :** $PQ = AB$ మరియు $QR = BC$ అగునట్లు Q వద్ద లంబకోణము వుండే లంబకోణ త్రిభుజము PQR ని నిర్మించుము.




**ఉపపత్తి :** $\Delta PQR$ లో $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ($\angle Q = 90^0$ కావున పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారం)

$PR^2 = AB^2 + BC^2$ (నిర్మాణము నుండి) ...(1)

కాని $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (దత్తాంశము) ...(2)

$\therefore$ $AC = PR$ (1), (2) ల నుండి

ఇప్పుడు $\Delta ABC$, $\Delta PQR$ లలో

$AB = PQ$ (నిర్మాణము)

$BC = QR$ (నిర్మాణము)

$AC = PR$ (నిరూపితము)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం)

$\therefore$ $\angle B = \angle Q$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భాగాలు)

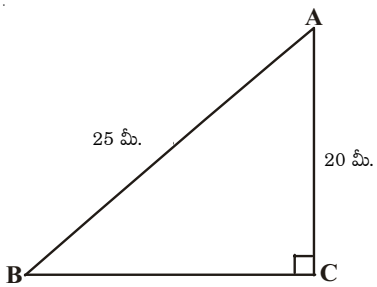
కాని $\angle Q = 90°$ (నిర్మాణము నుండి)

$\therefore$ $\angle B = 90°$.

సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

**ఉదాహరణ-11.** 25మీ. పొడవుగల ఒక నిచ్చెన, గోడపై 20మీ ఎత్తున గల ఒక కిటికీని తాకుచున్నది. అయిన ఆ నిచ్చెన అడుగుభాగము నేలపై గోడ నుండి ఎంత దూరములో నున్నది.




సాధన: $\Delta ABC$ లో $\angle C = 90°$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

$25^2 = 20^2 + BC^2$

$BC^2 = 625 - 400 = 225$

$BC = \sqrt{225} = 15$మీ.

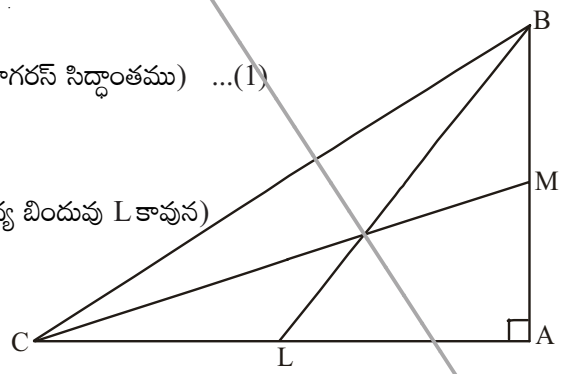
కావున నిచ్చెన అడుగుభాగము నేలపై గోడ నుండి 15మీ. దూరములో నున్నది.

**ఉదాహరణ-12.** లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో శీర్షము 'A' వద్ద లంబ కోణము కలదు. BL మరియు CMలు దీనిలో మధ్యగత రేఖలు అయిన

$4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ అనిచూపండి.

**సాధన :** $\Delta ABC$ లో $\angle A = 90°$.

BL, CM లు మధ్యగత రేఖలు




$\Delta ABC$ లో $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము) ...(1)

$\Delta ABL$లో, $BL^2 = AL^2 + AB^2$

కాని $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ ($\because$ AC మధ్య బిందువు L కావున)

$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

$\therefore$ $4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ ...(2)

$\Delta CMA$ లో, $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ ($\because$ AB మధ్య బిందువు M కావున)

$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \quad ...(3)$$

(2), (3) లను కలుపగా

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

$\therefore\ 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ (1) నుండి.

**ఉదాహరణ-13.** దీర్ఘచతురస్రం ABCD అంతరంలో ఏదైనా బిందువు 'O'ఆ ....

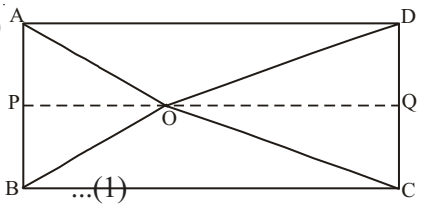
$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ అనిచూపండి.

**సాధన :** 'O' బిందువు గుండా BC కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీసిన అది ABని P వద్ద, DC ని Q వద్ద తాకును.

అపుడు PQ || BC.

$\therefore$ PQ $\perp$ AB మరియు PQ $\perp$ DC ($\because \angle B = \angle C = 90°$)

కావున $\angle BPQ = 90°$ & $\angle CQP = 90°$




$\therefore$ BPQC మరియు APQD లు రెండు దీర్ఘచతురస్రాలు.

$\Delta OPB$ నుండి $OB^2 = BP^2 + OP^2$ ...(1)

అదేవిధంగా $\Delta OQD$ నుండి $OD^2 = OQ^2 + DQ^2$ ...(2)

$\Delta OQC$ నుండి $OC^2 = OQ^2 + CQ^2$ ...(3)

$\Delta OAP$ నుండి $OA^2 = AP^2 + OP^2$

(1), (2) లను కలుపగా

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \quad (\because BP = CQ \text{ మరియు } DQ = AP)$$

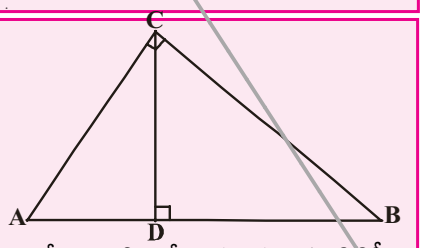
$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2 \quad ((3), (4) \text{ ల నుండి})$$

**ఇవి చేయండి.**

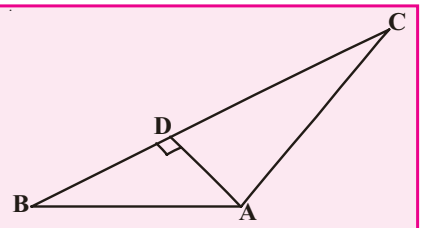
1. $\Delta ACB$లో, $\angle C = 90^0$, CD $\perp$ AB అయిన

$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$. అని నిరూపించండి.




2. 15 మీటర్ల పొడవుగల ఒక నిచ్చెన రోడ్డుపై ఒక వైపు నున్న భవనంపై నేల నుండి 9 మీటర్ల ఎత్తున గల కిటికీని తాకును. నిచ్చెన అడుగుభాగమును అదే ప్రదేశములో వుంచి నిచ్చెనను రోడ్డుకు అవతలి వైపున వున్న భవనము వైపునకు తిప్పిన దానిపై నేల నుండి 12మీ ఎత్తున గల కిటికీని తాకును. అయిన ఆ రోడ్డు వెడల్పును కనుగొనుము.

3. ఇచ్చిన పటంలో $AD \perp BC$ అయిన $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ అని చూపండి.




**ఉదాహరణ-14.** ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము, దాని అతి చిన్న భుజము రెట్టింపు కన్నా 6మీ. ఎక్కువ. మూడవ భుజము కర్ణము కన్నా 2 మీ తక్కువ అయిన ఆ త్రిభుజభుజాలను కనుగొనుము.

**సాధన :** అతి చిన్న భుజమును $x$ మీ. అనుకొనుము.

అపుడు కర్ణము $= (2x + 6)$మీ. మరియు మూడవ భుజము $= (2x + 4)$మీ.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నుండి,

$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$

$4x^2 + 24x + 36 = x^2 + 4x^2 + 16x + 16$

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$(x - 10)(x + 2) = 0$

$x = 10$ లేదా $x = -2$

$x$ అనేది త్రిభుజ భుజము కావున రుణవిలువ కానేరదు.

$\therefore x = 10$

అందువలన, ఆ త్రిభుజభుజాలు 10మీ, 26మీ మరియు 24మీ.

**ఉదాహరణ-15.** లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో లంబకోణము శీర్షము 'C' వద్ద కలదు. $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ అనుకొనుము. ఇంకా శీర్షము 'C' నుండి AB కి గీసిన లంబము పొడవు p అయిన

(i) $pc = ab$ (ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ అని చూపండి.

**సాధన :**

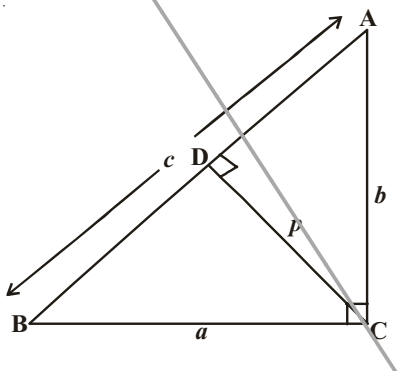
(i) $CD \perp AB$ మరియు $CD = p$.

$\Delta ABC$ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times AB \times CD$

$= \frac{1}{2} cp$.

అలాగే $\Delta ABC$ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times BC \times AC$

$= \frac{1}{2} ab$



$$\frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}ab$$

$$cp = ab \qquad ...(1)$$

(ii) లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో లంబకోణము శీర్షము 'C' వద్ద కలదు.

కావున $AB^2 = BC^2 + AC^2$

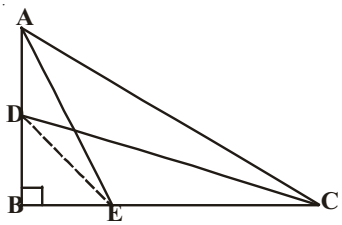
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

## అభ్యాసము - 8.4

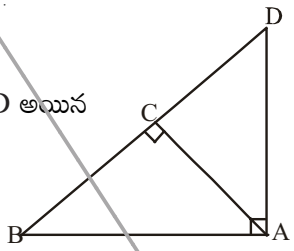
1. ఒక రాంబస్‌లో భుజాల వర్గాల మొత్తము, దాని కర్ణముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానమని చూపండి.




2. లంబకోణ త్రిభుజము ABCలో లంబకోణము శీర్షము 'B' వద్ద కలదు. D మరియు E బిందువులు వరుసగా AB, BC లపై కలవనుకొనుము. అయిన $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ అని చూపండి.

3. ఒక సమబాహు త్రిభుజములో భుజము వర్గమునకు మూడు రెట్లు దాని ఉన్నతి (లంబము) వర్గమునకు నాలుగురెట్లు అని చూపండి.

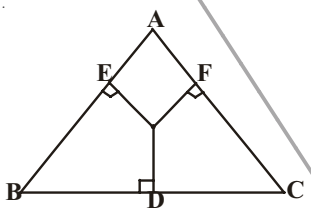
4. PQR త్రిభుజంలో లంబకోణము శీర్షము 'P' వద్ద కలదు. $PM \perp QR$ అగునట్లు QR పై బిందువు M అయిన $PM^2 = QM \cdot MR$ అని చూపండి.




5. త్రిభుజము ABDలో లంబకోణము 'A' వద్ద కలదు. మరియు $AC \perp BD$ అయిన
   (i) $AB^2 = BC.BD$. (ii) $AC^2 = BC.DC$
   (iii) $AD^2 = BD.CD$ అని చూపండి.

6. సమద్విబాహు త్రిభుజము ABCలో లంబకోణము C వద్ద కలదు. అయిన $AB^2 = 2AC^2$ అని చూపండి.

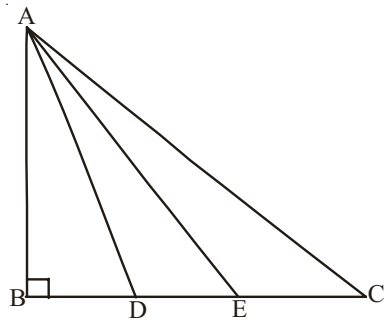
7. త్రిభుజము ABC అంతరంలో ఏదైనా బిందువు 'O'
   $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ మరియు $OF \perp AB$ అయిన
   (i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2$
   $= AF^2 + BD^2 + CE^2$
   (ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$ అని చూపండి.



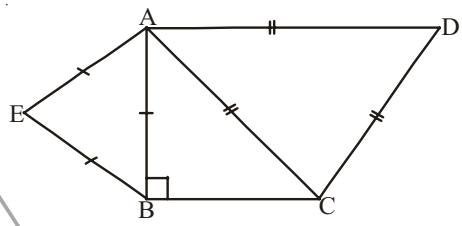
8. 18 మీటర్ల పొడవు గల ఒక నిలువు స్థంబంకు 24 మీటర్ల పొడవు గల ఒక తీగ కట్టబడినది. తీగ రెండవ చివరకు ఒక మేకు కట్టబడినది. భూమిపై స్థంబం నుండి ఎంత దూరములో ఆ మేకును పాతిన ఆ తీగ బిగుతుగా నుండును ?

9. 6మీ మరియు 11మీటర్ల పొడవు గల స్థంబం ఒక చదునైన నేలపై కలవు. నేలపై ఆ రెండు స్థంబం అడుగు భాగముల మధ్య దూరము 12మీ అయిన ఆ రెండు స్థంబం పైభాగముల మధ్యదూరము ఎంత?

10. సమబాహు త్రిభుజము ABCలో, భుజంBCపై బిందువు 'D', యింకా $BD = \frac{1}{3}BC$ అయిన $9AD^2 = 7AB^2$ అని చూపండి.




11. ఇచ్చిన పటంలో, $\Delta ABC$ ఒక లంబకోణ త్రిభుజము. శీర్షము వద్ద లంబకోణము కలదు. BC భుజాన్ని D మరియు E బిందువులు సమత్రిఖండన చేయును అయిన $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$ అని చూపండి.




12. సమద్విబాహు త్రిభుజము ABCలో, లంబకోణము 'B' వద్ద కలదు. AC మరియు AB భుజాలపై సరూప త్రిభుజాలు ACD మరియు ABE నిర్మింపబడినవి. అయిన $\Delta ABE$ మరియు $\Delta ACD$ ల వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

## 8.7 సిద్ధాంత ప్రవచనాల వివిధరూపాలు

### 1. వ్యతిరేక ప్రవచనము :

ఒక ప్రవచనము ఇచ్చినపుడు దాని చివర "కాదు" చేర్చడం వలన ఒక క్రొత్త ప్రవచనము ఏర్పడుతుంది. దానినే మనం వ్యతిరేక ప్రవచనం అంటాము.

ఉదాహరణకు "$\Delta ABC$ సమబాహు త్రిభుజము" అనేది ఒక ప్రవచనము దీనిని మనం "$p$" తో సూచించిన దానిని మనం ఈ క్రింది విధంగా రాస్తాము.

$p$ : త్రిభుజము ABC సమబాహు త్రిభుజము. అపుడు దాని వ్యతిరేఖ ప్రవచనము "త్రిభుజము ABC సమబాహు త్రిభుజము కాదు". '$p$' యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనాన్ని '$\sim p$' తో సూచిస్తాము. మరియు దానిని వ్యతిరేక ప్రవచనము అని చదువుతాము. ప్రవచనము $p$ చెప్పిన దానిని $\sim p$ వ్యతిరేకిస్తుంది అనగా నిరాకరిస్తుంది.

మనము ఈ వ్యతిరేక ప్రవచనాన్ని రాసేటపుడు దానిని అర్థం చేసుకొనుటలో ఏవిధమైన గందరగోళానికి తావులేకుండా రాయాలి.

ఈ క్రింది ఉదాహరణను జాగ్రత్తగా పరిశీలించండి.

P : అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు. దీనికి వ్యతిరేక ప్రవచనము $\sim p$ ని మనం ఈ క్రింది విధాలుగా రాయవచ్చును.

i) $\sim p$ : అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు.

ii) $\sim p$ : అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు కావు వాస్తవ సంఖ్యలు

దీనిలో ఏ వ్యతిరేక ప్రవచనము సరియైనదో ఎలా గుర్తిస్తాము? దీనికి ఈ నియమాన్ని పాటిస్తాము. '$p$' ఒక ప్రవచనమను కొనుము. $\sim p$ దాని వ్యతిరేక ప్రవచనము. $p$ సత్యమైన $\sim p$ అసత్యము మరియు $p$ అసత్యమైన $\sim p$ సత్యము.

ఉదాహరణము $s$ : $2+2=4$ సత్యము

$\sim s$ : $2+2 \neq 4$ అసత్యము

## 2.. ప్రవచన విపర్యయము :

సత్యముగాని, అసత్యముగాని ఏదో ఒకటి మాత్రమే అయ్యే సాధారణ వాక్యము ఒక. సరళ ప్రవచనము. రెండు సరళ ప్రవచనాలను కలుపగా మనకు సంయుక్త ప్రవచనాలు ఏర్పడతాయి. రెండు సరళ ప్రవచనాలు 'అయినచో'చే కలుపగా ఏర్పడిన సంయుక్త ప్రవచనాన్ని అనుషంగికము లేదా నియత ప్రవచనము అంటారు.

రెండు సరళ ప్రవచనాలను $p$ మరియు $q$ లను 'అయినచో' కలుపగా $p$ అయినచో $q$ వస్తుంది. దీనిని మనం $p \Rightarrow q$ అని రాస్తాము.

ఈ $p \Rightarrow q$ లో మనం $p, q$ లను తారుమారు చేయగా మనకు $q \Rightarrow p$ వస్తుంది. దీనినే మనం ప్రవచన విపర్యయము అంటాము.

ఉదాహరణ : $p \Rightarrow q$ త్రిభుజము ABCలో $AB = AC$ అయినచో $\angle C = \angle B$

విపర్యయము $q \Rightarrow p$: త్రిభుజము ABC లో $\angle C = \angle B$ అయినచో $AB = AC$.

### విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణ :

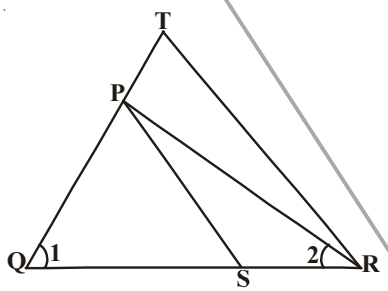
ఈ విరుద్ధత ద్వారా నిరూపణలో, మనము నిరూపించవలసిన ప్రవచనము యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనమును సత్యమని తీసుకొంటాము. దీనిని నిరూపించే ప్రయత్నంలో ఎక్కడో ఒకచోట విరుద్ధత వస్తుంది. అపుడు మనం ఈ విరుద్ధత అనేది వ్యతిరేక ప్రవచనం సత్యమని మనం తప్పుగా తీసుకొనుట వలన ఏర్పడినదని గ్రహిస్తాము. అప్పుడు మనం ఇచ్చిన ప్రవచనం సత్యమని ముగింపునకు వస్తాము.

## ఐచ్ఛిక అభ్యాసము (పరీక్షలకు నిర్దేశింపబడినది కాదు)

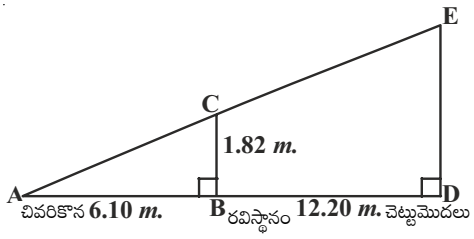
1. ఇచ్చిన పటంలో,

$\frac{QT}{PR} = \frac{QR}{QS}$ మరియు $\angle 1 = \angle 2$

అయిన $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ అని చూపండి.

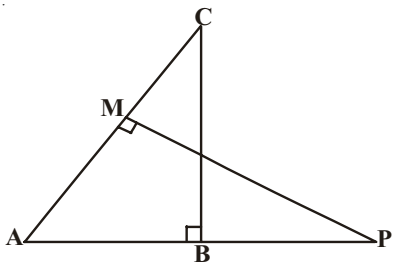


2. రవి ఎత్తు 1.82మీ. అతని ఇంటి పెరడులోని ఒక చెట్టు ఎత్తును కనుగొనాలనుకున్నాడు. చెట్టు మొదలు నుండి నేలపై 12.20 మీటర్ల దూరము నడువగా అతని నీడ, చెట్టు నీడ చివరి భాగములు ఖచ్చితముగా ఏకీభవించెను. అతను ఇపుడు ఆ నీడ చివరి భాగము నుండి 6.10మీ దూరములో నిలబడి వున్నచో, ఆ చెట్టు ఎత్తు ఎంత?




3. సమాంతర చతుర్భుజము ABCDలో, AB పై ఏదేని బిందువు 'P' దాని కర్ణము AC, DP ని బిందువు Q వద్ద ఖండించును. అయిన $CQ \times PQ = QA \times QD$ అని చూపండి.

4. $\Delta ABC$ మరియు $\Delta AMP$ లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు. వీటిలో లంబకోణములు వరుసగా B మరియు M బిందువుల వద్ద కలవు.




అయిన (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ అని చూపండి.

5. ఒక విమానము విమానాశ్రయము నుండి గంటకు 1000 కి.మీ. వేగముతో ఉత్తరము వైపు ప్రయాణించుచున్నది. అదే సమయంలో వేరొక విమానము అక్కడి నుండి గంటకు 1200 కి.మీ వేగముతో పడమర వైపు ప్రయాణించు చున్నది. అయిన $1\frac{1}{2}$ గంటల తరువాత ఆ రెండు విమానములు ఎంత దూరములో వుండును?

6. లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో లంబకోణము C వద్ద కలదు. P మరియు Q బిందువులు వరుసగా AC మరియు CB లపై బిందువులు ఇంకా ఆ భుజాలను అవి 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించును.

అయిన (i) $9AQ^2 = 9AC^2 + 4BC^2$

(ii) $9BP^2 = 9BC^2 + 4AC^2$

(iii) $9(AQ^2 + BP^2) = 13AB^2$ అని చూపండి.

## మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఒకే ఆకారమును కలిగి వుండి ఒకే పరిమాణము కలిగి వుండనవసరము లేని పటాలను సరూప పటాలు అంటారు.
2. అన్ని సర్వసమాన పటాలు సరూపాలు కాని విపర్యయము సత్యము కాదు.
3. సమాన సంఖ్యలో భుజాలు కలిగిన రెండు బహుభుజులు సరూపాలు కావాలంటే
   (i) వాటి అనురూప కోణాలు సమానంగా వుండాలి
   (ii) వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో వుండాలి (అనుపాతంలో వుండాలి)

   ఈ బహుభుజుల సరూపకతకు పై రెండు నియమాలలో ఏదో ఒక నియమము సరిపోదు.
4. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరువేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.

5. ఒక త్రిభుజములో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా నుండును.
6. రెండు త్రిభుజాలలో కోణాలు సమానంగా వుంటే వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానంగా వుంటాయి. (అనుపాతంలో వుంటాయి) ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు (కో.కో.కో. సరూపకత)
7. ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజము లోని రెండు కోణములకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.
8. రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణాలు సమానము. ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.భు.భు. సరూపకత)
9. ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణమునకు సమానమై, ఈ కోణాలను కలిగి వున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.కో.భు సరూపకత)
10. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానము.
11. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో లంబకోణము కలిగిన శీర్షము నుండి కర్ణానికి లంబము గీసిన, ఆ లంబానికి ఇరువైపులా ఏర్పడిన త్రిభుజాలు ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపాలు అంతేగాక అవి ఒకదానికొకటి కూడా సరూపాలు
12. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానము (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)
13. ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైన మొదటి భుజానికి ఎదురుగా వుండే కోణము లంబకోణము అనగా ఆ త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజమవుతుంది.

**పజిల్**

ఒక త్రిభుజాన్ని గీయుము. ఆ త్రిభుజభుజాల మధ్య బిందువులను కలుపగా 4 త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి. మరల అలా ఏర్పడిన త్రిభుజాల మధ్య బిందువులను కలుపుము. ఈ ప్రక్రియను అలా కొనసాగించుకొంటూ పోయిన ఏర్పడిన అన్ని త్రిభుజాలు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి. ఎందుకు? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.