www.apteachers.in

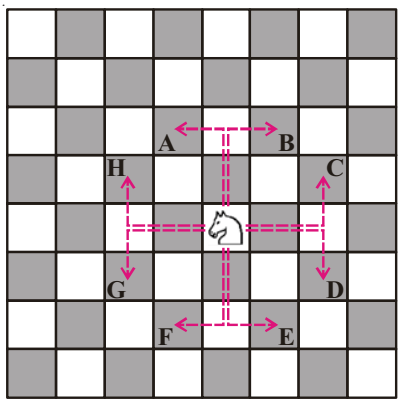
అధ్యాయము

7 నిరూపక రేఖాగణితం

(Coordinate Geometry)

7.1 పరిచయం

మీకు చదరంగం గురించి తెలుసు కదూ! అందులో గుఱ్ఱం 'L' ఆకారంలో (రెండు సోపానాలు ముందుకు ఒక సోపానం ప్రక్కకు జరుగుతుంది) కదులుతుంది. పటం చూడండి. ఇంకా ఈ గుఱ్ఱం మిగతా పావులమీది నుండి దుమికి పోతుంది కూడా. అదేవిధంగా ఒంటె ఎన్ని సోపానాల వరకు వీలయితే అంతవరకు కర్ణాల వెంబడి కదులుతుంది.



చదరంగంలో మిగిలిన పావులు ఎలా కదులుతాయో తెలుసుకోండి. అదేవిధంగా గుఱ్ఱం, ఒంటె మరియు మిగిలిన పావుల స్థానాలను చదరంగం బోర్డుపై గుర్తించి అవి ఎలా కదులుతాయో గమనించండి.

i. గుఱ్ఱం యొక్క స్థానం మూలబిందువు (0, 0) వద్ద ఉన్నదను కొందాం. దాని యొక్క కదలిక నాలుగు వైపులా ఎలా ఉంటో పటంలో చుక్కల గీతలతో చూపబడినది. గుఱ్ఱం యొక్క వివిధ కదలికల తర్వాత దాని స్థానాలను పరిశీలించి, ఆస్థానాల నిరూపకాలను కనుగొనండి.

ఇవి చేయండి

i. ప్రక్క పటం నుండి A, B, C, D, E, F, G, H బిందువుల నిరూపకాలు కనుగొనండి.

ii. 8 కదలికల తర్వాత గుఱ్ఱం కదిలిన దూరం కనుగొనండి.
అనగా మూలబిందువు (0, 0) నుండి A, B, C, D, E, F, G, H బిందువుల మధ్య దూరంను కనుగొనండి.

iii. బిందువులు H మరియు C ల మధ్య దూరమెంత? అలాగే బిందువులు A మరియు B ల మధ్య దూరమెంత ?

7.2 రెండు బిందువుల మధ్య దూరం

బిందువులు A(2, 0) మరియు B(6, 0) X-అక్షంపై (పటంలో చూపినట్లుగా) ఉన్నట్లయితే బిందువులు A మరియు B మధ్యదూరం 4 యూనిట్లు అని పటం ద్వారా సులభంగా తెలుసుకోవచ్చు.

ఏవైనా రెండు బిందువులు X-అక్షంపై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువులలోని x-నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం ఆ బిందువుల మధ్యదూరాన్ని తెలుపుతుంది.

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

బిందువుల A(–2, 0) మరియు B(–6, 0) మధ్యదూరమెంత?

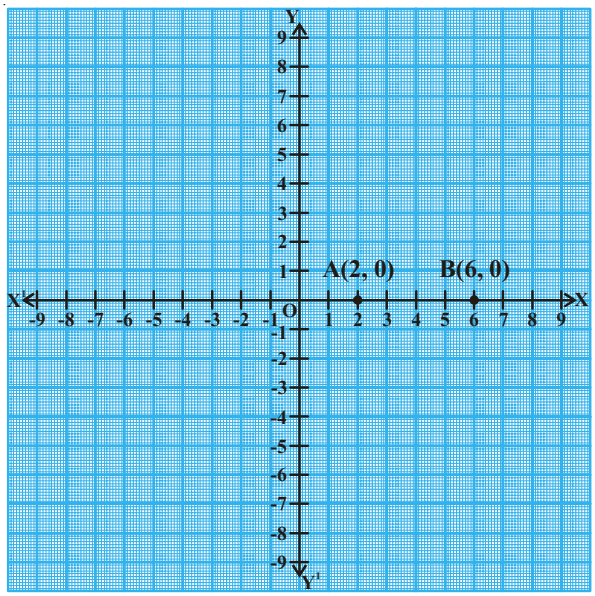
పై బిందువులలోని x నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం $(-6) - (-2) = -4$ (ఋణవిలువ)

దూరాన్ని మనమెప్పుడూ ఋణవిలువలలో సూచించము.

అందువల్ల, దూరం యొక్క పరమమూల్య విలువను లెక్కిస్తాము.

కాబట్టి పై A మరియు B బిందువుల మధ్యదూరం

$= |(-6) - (-2)| = |-4| = 4$ యూనిట్లు



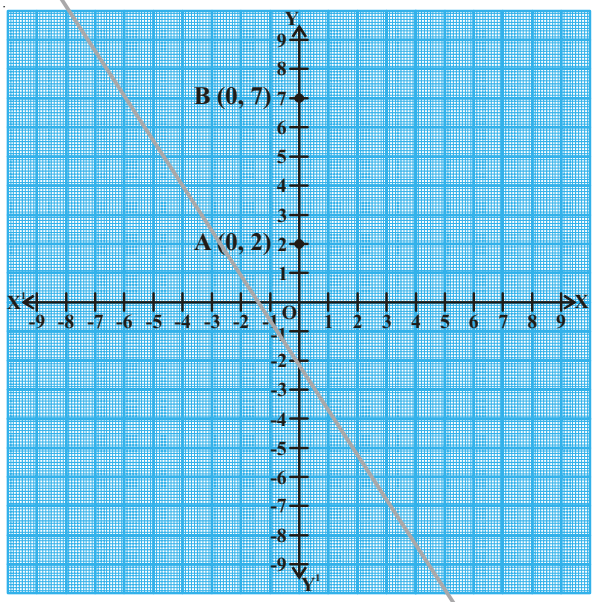
సాధారణంగా X-అక్షంపై ఉన్న బిందువులు $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ అయితే వాటి మధ్యదూరం $|x_2 - x_1|$

అదేవిధంగా, రెండు బిందువులు Y–అక్షంపై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువులలోని Y నిరూపకాల మధ్యవ్యత్యాసాన్ని ఆ రెండు బిందువుల మధ్య దూరంగా తెలుపవచ్చు.

బిందువులు $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ ల మధ్యదూరం $|y_2 - y_1|$ అవుతుంది.

ఉదాహరణకు రెండు బిందువులు A(0, 2) మరియు B(0, 7) ఉన్నాయనుకోండి.

A, B ల మధ్యదూరం $|7 - 2| = 5$ యూనిట్లు.



ఇవి చేయండి

1. (–4, 0), (2, 0), (6, 0), (–8, 0) బిందువులు నిరూపక తలంలో ఎక్కడ ఉంటాయి?
2. (–4, 0), (6, 0) బిందువుల మధ్యదూరమెంత?

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ప్రయత్నించండి.

1. (0, –3), (0, –8), (0, 6), (0, 4) బిందువులు నిరూపక తలంలో ఎక్కడ ఉంటాయి?
2. (0, –3), (0, –8) బిందువుల మధ్యదూరమెంత? అలాగే Y-అక్షంపై ఉన్న బిందువుల మధ్యదూరం $|y_2 - y_1|$ అవుతుందని చెప్పగలవా?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

రెండు బిందువులలోని x లేదా y నిరూపకాలు సమానంగా (0 కాకుండా) ఉంటే వాటి మధ్య దూరం ఎలా కనుగొంటావు?

7.3 నిరూపక అక్షాలకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖపై గల బిందువుల మధ్యదూరం

రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_1)$ ఉన్నాయనుకుందాం. వీటిలో y నిరూపకాలు సమానం కాబట్టి ఈ బిందువులు X-అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖపై ఉంటాయి.

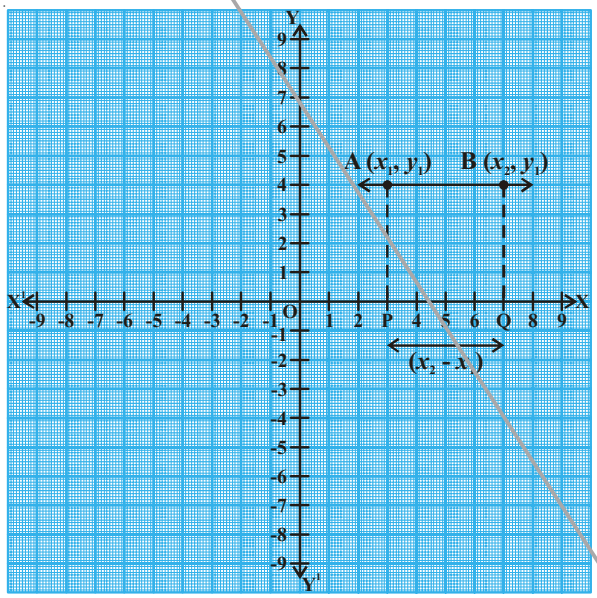
X అక్షంనకు లంబంగా AP మరియు BQ లను గీయండి.

పటాన్ని పరిశీలించండి. A మరియు B ల మధ్యదూరం అనేది P మరియు Q ల మధ్యదూరానికి సమానం అవుతుంది.

కాబట్టి,

A, Bల మధ్యదూరం=P, Q ల మధ్యదూరం

$= |x_2 - x_1|$ (x నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం)



అదేవిధంగా, రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_1, y_2)$ లను కలుపు రేఖ y – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

అపుడు వాటి మధ్య దూరం = $|y_2 - y_1|$

(yని నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం).

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ఉదాహరణ-1. A (4,0) మరియు B (8, 0) బిందువుల మధ్యదూరం ఎంత?

సాధన : పై బిందువులలోని x – నిరూపకముల మధ్య వ్యత్యాసం $|x_2 - x_1| = |8 - 4| = 4$ యూనిట్లు.

ఉదాహరణ-2. A మరియు B బిందువులు వరుసగా (8, 3), (–4, 3). A , B ల మధ్యదూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : (8, 3), (–4, 3) బిందువులు నిరూపక తలంలో రెండు వేర్వేరు పాదాలలో ఉంటాయి. మరియు y నిరూపకాలు సమానం.

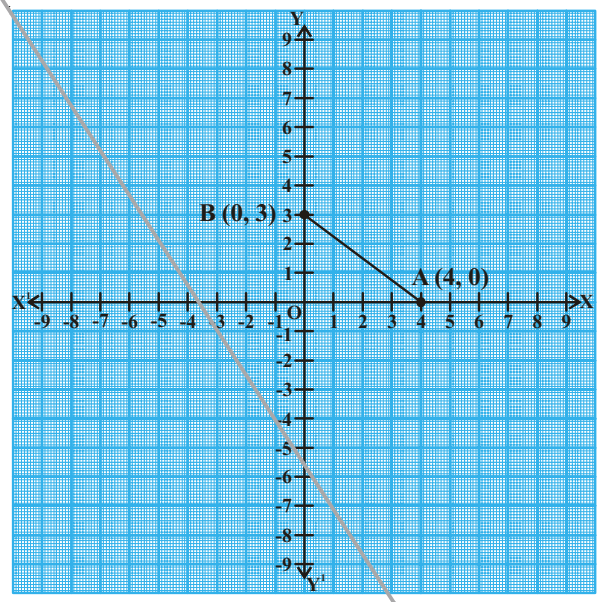
AB మధ్యదూరం $= |x_2 - x_1| = |-4 - 8| = |-12| = 12$ యూనిట్లు.

ఇవి చేయండి.

కింది బిందువుల మధ్యదూరం కనుగొనండి.

i. (3, 8), (6, 8) ii. (–4,–3), (–8,–3) iii. (3, 4), (3, 8) iv. (–5,–8), (–5,–12)

A మరియు B బిందువులు వరుసగా (4, 0), (0, 3) మరియు మూలబిందువు 'O' ఉన్నాయనుకుందాం.



పటం నుండి ΔAOB లంబకోణత్రిభుజం

OA = 4 యూనిట్లు (x-నిరూపకం)

OB = 3 యూనిట్లు (y-నిరూపకం)

అయిన AB మధ్యదూరం = ?

పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించిన

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = 4^2 + 3^2$

$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow$ A, Bల మధ్యదూరం = 5యూనిట్లు.

ఇవి చేయండి

కింద బిందువుల మధ్యదూరం కనుగొనండి.

(i) A(–2, 0) మరియు B(0, 4) (ii) P(0, 5) మరియు Q(–12, 0)

ప్రయత్నించండి

మూలబిందువు 'O' మరియు బిందువు A (7, 4) ల మధ్యదూరం కనుగొనండి.

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

రెండు బిందువులు నిరూపకతలంలోని వేర్వేరు పాదాలలో ఉంటే వాటి మధ్యదూరం ఎలా కనుగొంటారు?

7.4 నిరూకతలంలోని ఏవేని రెండు బిందువుల (ఒకరేఖపై గల) మధ్యదూరం

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$లు నిరూపకతలంలో ఒకరేఖపై ఉన్న బిందువులు అనుకొంటే (పటంలో చూపినట్లు)

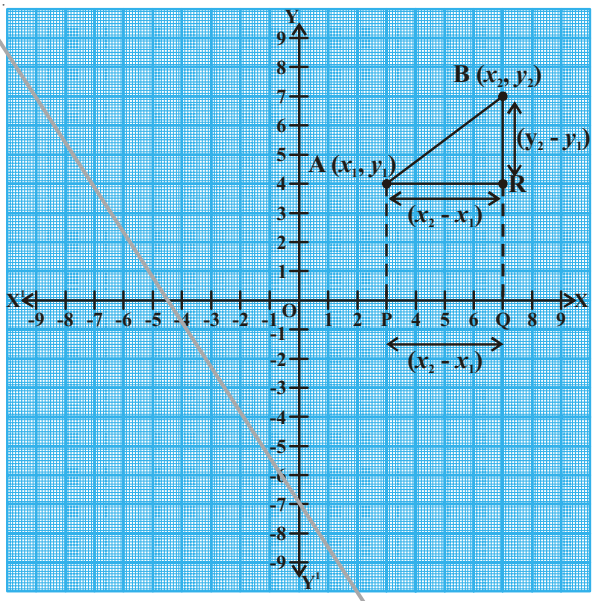
X-అక్షం పైకి AP మరియు BQ లంబరేఖలను గీయండి.

బిందువు A నుండి BQ రేఖపైకి లంబరేఖ (Rవద్దకు) AR ను గీయండి.

అపుడు $OP = x_1$, $OQ = x_2$(ఎందుకు?)

అలాగే $PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$

పటంలో APQR ఆకారాన్ని పరిశీలించండి. APQR ఒక దీర్ఘచతురస్రం.



కాబట్టి $PQ = AR = x_2 - x_1$.

అలాగే $QB = y_2$, $QR = y_1$,

$BR = QB - QR = y_2 - y_1$

ΔARB లంబకోణత్రిభుజం నుండి

$$AB^2 = AR^2 + RB^2$$

(పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

కాబట్టి A మరియు B బిందువుల మధ్యదూరంనకు

సూత్రం $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. రాము, బిందువు $P(x_1, y_1)$ మరియు మూలబిందువు $O(0, 0)$ ల మధ్యదూరం $\sqrt{x^2 + y^2}$ అని తెలిపెను. నీవు రాము తెలిపిన దానితో ఏకీభవిస్తున్నావా? లేదా? ఎందుకు?
2. రాము రెండు బిందువుల మధ్య దూరాన్ని ఈవిధంగా రాశాడు.

   $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ఎందుకు?

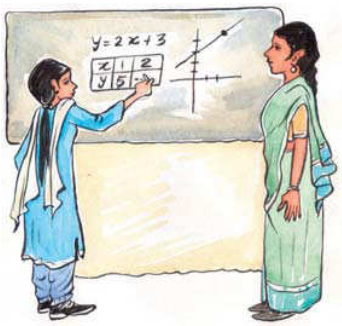
Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ఉదాహరణ-3. బిందువులు A(4, 2) మరియు B(8, 6) ల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : పై బిందువులను (x_1, y_1), (x_2, y_2)లతో పోల్చగా

$x_1 = 4,\ x_2 = 8, y_1 = 3, y_2 = 6$



రెండు బిందువుల మధ్యదూరం కనుగొను సూత్రం ఉపయోగించిన

AB మధ్యదూరం $= d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ యూనిట్లు.

ఇవి చేయండి

కింద ఇవ్వబడిన బిందువుల మధ్యదూరం కనుగొనండి.

(i) (7, 8) మరియు (–2, 3) (ii) (–8, 6) మరియు (2, 0)

ప్రయత్నించండి

ఒక రేఖాఖండం $\overline{AB}$ యొక్క తొలి, చివరి బిందువులు A(1, –3) మరియు B(–4, 4). అయిన AB మధ్యదూరాన్ని దగ్గరి దశాంశాలకు కనుగొనండి

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

శ్రీధర్ రెండుబిందువులు T(5, 2) మరియు R(–4, –1) ల మధ్యదూరం 9.5 యూనిట్లుగా లెక్కించాడు.

ఇపుడు మీరు రెండు బిందువులు P (4, 1) మరియు Q (–5, –2)ల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనండి. మీరు కూడా శ్రీధర్ పొందిన సమాధానాన్నే పొందారా? ఎందుకు?

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-4. బిందువులు A (4, 2), B (7, 5) మరియు C (9, 7) ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నాయని చూపండి.

సాధన : A, B, C లు ఒకే రేఖపై ఉన్నవి అనుకొనిన దీని నుండి AB + BC = AC

ఇపుడు మనం AB, BC, AC ల మధ్య దూరం కనుగొందాం.

బిందువుల మధ్యదూరం సూత్రం = $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ను ఉపయోగించి

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

$$d = AB = \sqrt{(7-4)^2+(5-2)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$= \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$ యూనిట్లు.

$$BC = \sqrt{(9-7)^2+(7-5)^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$ యూనిట్లు

$$AC = \sqrt{(9-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

$= \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$ యూనిట్లు.

ఇపుడు $AB + BC = 3\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$.

దీని నుండి AB + BC = AC ని సంతృప్తిపరుస్తుంది. కాబట్టి బిందువులు (4, 2), (7, 5) మరియు (9, 7) లు ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నవి.

(ఒకే సరళరేఖపై ఉన్న బిందువులను సరేఖీయ బిందువులు అంటారు).

ఉదాహరణ-5. బిందువులు (3, 2), (–2, –3) మరియు (2, 3) లు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయా?

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులు P(3, 2), Q(–2, –3), R(2, 3) లతో సూత్రాన్నుపయోగించి PQ, QR, PR ల మధ్యదూరం కనుగొందాం.

$$PQ = \sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7.07$$ యూనిట్లు (సుమారుగా)

$$QR = \sqrt{(2-(-2))^2+(3-(-3))^2} = \sqrt{(4)^2+(6)^2} = \sqrt{52} = 7.21$$ యూనిట్లు (సుమారుగా)

$$PR = \sqrt{(2-3)^2+(3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} = 1.41$$ యూనిట్లు (సుమారుగా)

పై వాటి యొక్క దూరములకు చెందిన విలువలలో ఏ రెండు విలువల మొత్తం మూడవదానికంటే ఎక్కువ. అని గమనించవచ్చు. ("త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజముల పొడవుల మొత్తం మూడవ దానికంటే ఎక్కువ".)

కాబట్టిపై బిందువులు P, Q మరియు R లు ఒక విషమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

ఉదాహరణ-6. బిందువులు (1, 7), (4, 2), (–1, –1) మరియు (–4, 4)లు ఒక చతురస్రం యొక్క శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులు A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) మరియు D(–4, 4) లు అనుకుందాం.

పై బిందువులు చతురస్రమును ఏర్పరచాలంటే వాటి ద్వారా ఏర్పడే చతుర్భుజంలోని అన్ని భుజాల పొడవులు సమానం కావాలి మరియు కర్ణాల పొడవులు కూడా సమానం కావాలి.

కాబట్టి, భుజాల పొడవులు

$$AB = d = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$ యూనిట్లు

$$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$ యూనిట్లు

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$ యూనిట్లు

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

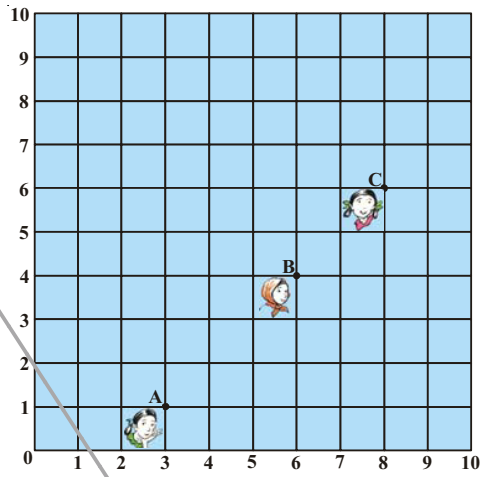
$$DA = \sqrt{(-4-1)^2+(4-7)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$ యూనిట్లు

మరియు కర్ణాలు $AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ యూనిట్లు

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$ యూనిట్లు

భుజాల $AB = BC = CD = DA$ మరియు కర్ణాలు $AC = BD$. కాబట్టి ఏర్పడిన చతుర్భుజంలో నాలుగు భుజాల పొడవులు సమానం మరియు కర్ణాల పొడవులు కూడా సమానం అని తెలుస్తుంది. కాబట్టి □ABCD అనేది ఒక చతురస్రం అవుతుంది.

ఉదాహరణ-7. ప్రక్క పటం ఒక తరగతి గదిలోని డెస్క్‌ల యొక్క అమరికను చూపిస్తుంది.



మాధురి, మీన, పల్లవి లు వరుసగా A(3, 1), B(6, 4) మరియు C(8, 6) స్థానాలలో కూర్చున్నారు.

వారు ముగ్గురూ ఒకే సరళరేఖలో కూర్చున్నారని మీరు భావిస్తున్నారా ?

మీ సమాధానానికి సరైన కారణం తెలపండి.

సాధన : రెండు బిందువుల మధ్యదూరం సూత్రంనుపయోగించి

$AB = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ యూనిట్లు

$BC = \sqrt{(18-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ యూనిట్లు

$AC = \sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ యూనిట్లు

దీని నుండి $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = AC$. కాబట్టి A, B, C బిందువులు సరేఖీయాలు. కాబట్టి వారు ముగ్గురు ఒకే సరళరేఖలో కూర్చున్నారు.

ఉదాహరణ-8. బిందువు (x, y) అనునది బిందువులు (7, 1) మరియు (3, 5) లకు సమానదూరంలో ఉన్నది అయిన x మరియు y ల మధ్య సంబంధమును కనుగొనండి.

సాధన : బిందువు $P(x, y)$ అనునది బిందువులు A(7, 1) మరియు B(3, 5) లకు సమానదూరంలో ఉన్నది.

దీని నుండి $AP = BP$ కాబట్టి, $AP^2 = BP^2$

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\Rightarrow (x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 2y + 1) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25)$$

$$\Rightarrow (x_2 + y^2 - 14x - 2y + 50) - (x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34) = 0$$

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

$\Rightarrow -8x + 8y = -16$

$\therefore\ x - y = 2$ (కావలసిన సంబంధము)

ఉదాహరణ-9. A(6, 5) మరియు B(– 4, 3) లకు సమానదూరంలో y-అక్షంపై నున్న బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.

సాధన : Y-అక్షంపై ఉన్న బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(0, y)$ అవుతాయని మనకు తెలుసు. కాబట్టి A మరియు B బిందువులకు సమానదూరంలో నున్న బిందువు $P(0, y)$ అనుకొనిన, అపుడు

$$PA = \sqrt{(6-0)^2 + (5-y)^2}$$

$$PB = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-4)^2}$$

$$PA^2 = PB^2$$

కాబట్టి $(6 - 0)^2 + (5 - y)^2 = (- 4 - 0)^2 + (3 - y)^2$

$\Rightarrow 36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

$\Rightarrow 4y = 36$

$\therefore\ y = 9$

కావలసిన బిందువు (0, 9).

దీన్ని సరిచూద్దాం : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

బిందువు (0, 9) అనే బిందువులు (6, 5) మరియు (4, 3) లకు సమానదూరంలో ఉంటుంది.

అభ్యాసం 7.1

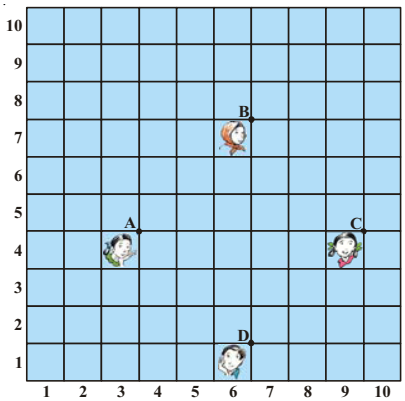
1. కింద ఇవ్వబడిన బిందువుల మధ్యదూరంను కనుగొనండి.
   (i) (2, 3) మరియు (4, 1)
   (ii) (–5, 7) మరియు (–1, 3)
   (iii) (–2, –3) మరియు (3, 2)
   (iv) (a, b) మరియు $(-a, -b)$
2. బిందువులు (0, 0) మరియు (36, 15) ల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనండి.
3. బిందువులు (1, 5), (2, 3) మరియు (–2, –1) లు సరేఖీయాలో కాదో సరిచూడండి.

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

4. బిందువులు (5, –2), (6, 4) మరియు (7, –2) లు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం యొక్క శీర్షాలు అవుతాయో? కావో? చూడండి.

5. పటంలో చూపినట్లు, ఒక తరగతిలో నలుగురు స్నేహితురాళ్ళు A, B, C, D స్థానాల్లో తరగతిలో అటూ ఇటూ తిరుగుతూ కొన్ని నిముషాలు పరిశీలించిన తర్వాత, జరీనా ఫణిని ఇలా అడిగింది. "ABCD ఒక చతురస్రం అవుతుందని నీవు భావించడం లేదా?" అందుకు ఫణి ఒప్పుకోలేదు.



బిందువుల మధ్య దూరంనకు సూత్రాన్నుపయోగించి ఎవరి సమాధానం సరైనది? ఎందుకు? తెలపండి.

6. బిందువులు A(a, 0), B($-a$, 0), C(0, $a\sqrt{3}$) అనునవి ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచగలవని చూపండి.

7. బిందువులు (–7, –3), (5, 10), (15, 8) మరియు (3, –5) లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజానికి శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి.

8. బిందువులు (–4, –7), (–1, 2), (8, 5) మరియు (5, –4) లు వరుసగా ఒక సమచతుర్భుజం (రాంబస్) యొక్క శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి. దాని వైశాల్యం కనుగొనండి.

(సూచన : రాంబస్ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × కర్ణముల లబ్ధం)

9. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువులతో ఏర్పడే చతుర్భుజం ఏరకమైనదో? దాని పేరును తెలపండి. మీ సమాధానానికి సరైన కారణం తెలపండి.

(i) (–1, –2), (1, 0), (–1, 2), (–3, 0) (ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, –4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

10. x-అక్షంపై ఉంటూ బిందువులు (2, –5) మరియు (–2, 9) లకు సమాన దూరంలో నున్న బిందువును కనుగొనండి.

11. బిందువులు (x, 7) మరియు (1, 15) ల మధ్యదూరం 10 యూనిట్లు, అయిన x విలువ ఎంత?

12. బిందువులు P(2, –3) మరియు Q(10, y) ల మధ్య దూరం 10 యూనిట్లు, అయిన y విలువ ఎంత?

13. బిందువు (–5, 6) గుండాపోవు వృత్తం యొక్క కేంద్రం (3, 2) అయిన దాని వ్యాసార్థంను కనుగొనండి.

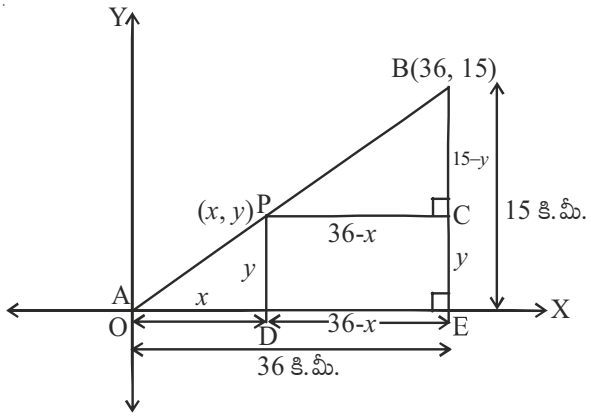
14. బిందువులు (1, 5), (5, 8) మరియు (13, 14) లతో త్రిభుజమును గీయగలమా? కారణం తెల్పండి.

15. బిందువులు (x, y) (–2, 8) మరియు (–3, –5) లకు సమానదూరంలో ఉన్నది. అయిన x మరియు y ల మధ్య సంబంధమును కనుక్కోండి.

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

7.5 విభజన సూత్రం



ఒక టెలీఫోన్ కంపెనీ వారు A మరియు B మధ్యలో P వద్ద ఒక రిలే టవర్‌ను ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. ఆ టవర్‌ను వారు A నుండి P కి గల దూరం కన్నా రెట్టింపు దూరం P నుండి B మధ్య ఉండే విధంగా ఏర్పాటు చేద్దామనుకున్నారు. P అనే బిందువు AB రేఖపై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువు AB రేఖను 1 : 2 నిష్పత్తిలో (పటంలో చూపినట్లు)విభజిస్తుంది.

A ను మూలబిందువు 'O' వద్ద ఉన్నదను కొనిన మరియు రెండు అక్షాలపై 1 కి.మీ దూరాన్ని 1 యూనిట్‌గా తీసుకొనిన, అలాగే బిందువు B నిరూపకాలు (36, 15) అయినచో రిలేటవర్ యొక్క స్థానాన్ని తెలుసుకోవాలంటే మనం బిందువు P యొక్క నిరూపకాలను తప్పక తెలుసుకోవాలి. మరి ఈ నిరూపకాలను ఎలా తెలుసుకుంటాం?

బిందువు P యొక్క నిరూపకాలను (x, y) అనుకుందాం. P నుండి మరియు B నుండి వరుసగా x-అక్షంపైకి D మరియు E వద్ద కలిసేలా లంబాలను గీయండి. P నుండి C వద్దకు BE కి లంబంగా ఉండేలా ఒకరేఖను గీయండి. ఇపుడు 6వ అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న కోణము, కోణము సరూపకత నియమం ద్వారా ΔPOD మరియు ΔBPC లు సరూప త్రిభుజాలు అవుతాయి.

అందువల్ల, $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$ మరియు $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

కాబట్టి, $\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$.

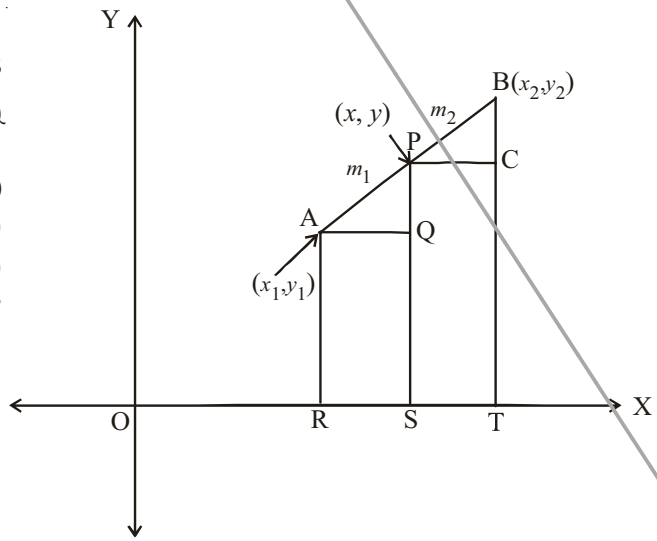
$2x = (36 - x)$ $\qquad$ $2y = 15 - y$

$3x = 36$ $\qquad$ $3y = 15$

$x = 12$ $\qquad$ $y = 5$

ఈ సమీకరణాల ద్వారా $x = 12$ మరియు $y = 5$ అని తెలుస్తున్నది.

బిందువు P(12, 5) రేఖను OP : PB = 1 : 2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందన్న నియమాన్ని మీరు సరిచూడవచ్చును.



ఏవేని రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనుకొనుము. ఏదేని బిందువు P (x, y) అనేది AB ని అంతరంగా $m_1 : m_2$, నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకొని

$\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (పటంలో చూడండి).

AR, PS మరియు BT లను x-అక్షంపైకి లంబంగా గీయండి.

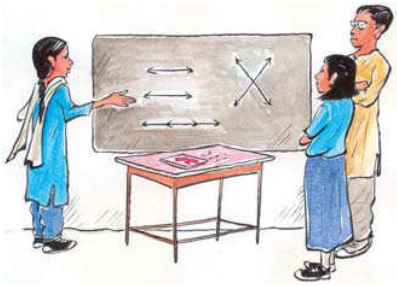
Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

AQ మరియు PC లను X-అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉండేలా గీయండి. ఇపుడు కోణం, కోణం సరూపకత నియమం నుండి

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

అందువల్ల, $\dfrac{PA}{BP} = \dfrac{AQ}{PC} = \dfrac{PQ}{BC}$ .....(1)



ఇపుడు, $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$

పై విలువలను (1)లో, ప్రతిక్షేపించగా, మనకు

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$ తీసుకొనిన $\Rightarrow$ $x = \dfrac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

అదేవిధంగా $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$, తీసుకొనిన $\Rightarrow$ $y = \dfrac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

కాబట్టి $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడు రేఖను అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు $P(x, y)$ యొక్క నిరూపకాలు

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad .....(2)$$

ఇదే విభజన సూత్రము

Y - అక్షంపైకి A, P మరియు B ల నుండి లంబరేఖలను గీసి పై పద్ధతి ద్వారా కూడా ఈ సూత్రమును రాబట్టవచ్చును.

AB రేఖను P బిందువు $k : 1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తున్నట్లయితే అపుడు P బిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ప్రత్యేక సందర్భం : ఒకరేఖ యొక్క మధ్య బిందువు ఆ రేఖాఖండాన్ని 1 : 1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. అందువల్ల బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడే రేఖ యొక్క మధ్యబిందువు P నిరూపకాలు

$$\left(\frac{1.x_1+1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1+1.y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

ఇపుడు, విభజన సూత్రాన్నుపయోగించి కొన్ని సమస్యలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ-10. బిందువులు (4, –3) మరియు (8, 5) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును 3 : 1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.

సాధన : కావలసిన బిందు నిరూపకాలు $P(x, y)$ అనుకొనిన విభజనసూత్రం ద్వారా

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right),$$

$$x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7,$$

$$y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

కావలసిన బిందువు $P(x, y) = (7, 3)$.

ఉదాహరణ-11. బిందువులు (3, 0) మరియు (-1, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనండి.

సాధన : బిందువులు (3, 0) మరియు (-1, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువు $M(x, y)$ అనుకొనిన,

మధ్యబిందువు $M(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$\therefore\ M(x, y) = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2).$$

ఇవి చేయండి

1 బిందువులు (3, 5) మరియు (8, 10) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును 2 : 3 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువును కనుగొనండి.

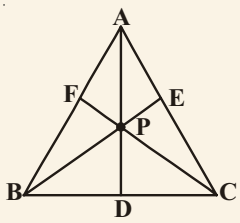
2. బిందువులు (2, 7) మరియు (12, –7) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనండి.

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ప్రయత్నించండి

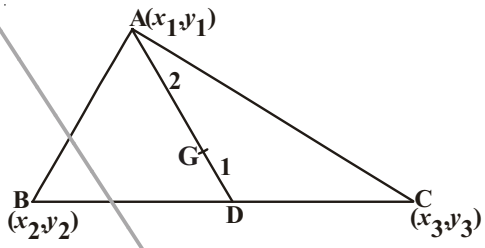
బిందువులు A(4, 2), B(6, 5) మరియు C(1, 4) లు ΔABC యొక్క శీర్షాలు.



1. A నుండి BC పైకి గీసిన మధ్యగత రేఖ Dవద్ద కలుస్తుంది. అయిన D బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.
2. AP : PD = 2 : 1 అయ్యేవిధంగా AD రేఖపై Pబిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.
3. అదేవిధంగా BE మరియు CF మధ్యగత రేఖలపై Q మరియు R బిందువులను గుర్తించండి.
4. BE రేఖను 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువును మరియు CF రేఖను 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువును కనుగొనండి.
5. మీరేమి గమనించారు?

   "ఒక త్రిభుజంలోని ప్రతి మధ్యగత రేఖను 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు ఆ త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రం అవుతుంది".

7.6 త్రిభుజం యొక్క గురుత్వకేంద్రం



ఒక త్రిభుజంలోని మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువును (ఖండన బిందువు) గురుత్వకేంద్రం అంటారు.

బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ లు ΔABC యొక్క శీర్షాలు అనుకొనుము.

AD అనే మధ్యగత రేఖ త్రిభుజ భూమి BCని సమద్విఖండన చేయును.

కావున $$D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

AD మధ్యగత రేఖపై 2 : 1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువు (గురుత్వకేంద్రం) $G(x, y)$అనుకొనిన

$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1(y_1)}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right]$$

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

గురుత్వ కేంద్రం యొక్క నిరూపకాలు

$$\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right].$$

ఉదాహరణ-12. బిందువులు (3, –5), (–7, 4), (10, –2) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రంను కనుగొనండి.

సాధన : గురుత్వకేంద్రం నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$\left(\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{(-5)+4+(-2)}{3}\right) = (2,-1)$$

$\therefore$ గురుత్వకేంద్రం (2, –1).

ఇవి చేయండి

బిందువులు (–4, 6), (2, –2) మరియు (2, 5) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రంను కనుగొనండి.

ప్రయత్నించండి

బిందువులు (2, 3), (x, y), (3, –2) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వకేంద్రం మూలబిందువు అయిన (x, y)ని కనుగొనండి.

ఉదాహరణ-13. బిందువులు A(– 6, 10) మరియు B(3, – 8) లచే ఏర్పడు రేఖఖాండమును బిందువు (– 4, 6) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?

సాధన : AB రేఖాఖండమును బిందువు (– 4, 6) అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకొనిన

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}, \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}\right) \qquad .....(1)$$

$(x, y) = (a, b)$ అయితే $x = a$ మరియు $y = b$ అని మనకు తెలుసు..

కావున, $-4 = \dfrac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}$ మరియు $6 = \dfrac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ఇపుడు, $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ దీనినుండి

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

అనగా $$7m_1 = 2m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

అనగా $m_1 : m_2 = 2 : 7$

ఈ నిష్పత్తి y నిరూపకానికి కూడా సంతృప్తిపరుస్తుందని చూపవచ్చు.

ఇపుడు, $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\dfrac{m_1}{m_2} + 10}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}$$ (ఇరువైపులా m_2చే భాగించగా)

$$= \frac{-8 \times \dfrac{2}{7} + 10}{\dfrac{2}{7} + 1} = \frac{\dfrac{-16}{7} + 10}{\dfrac{9}{7}} = \frac{-16 + 70}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

కావున బిందువులు A(–6, 10) మరియు B (3, –8) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండంను బిందువు (–4, 6) అనునది 2 : 7 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

బిందువులు A(6, 9) మరియు B(–6, –9) లను కలుపు రేఖాఖండమును

(a) మూలబిందువు ఏనిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది? ఆ రేఖఖండమునకు మూలబిందువును ఏమంటారు?

(b) బిందువు P(2, 3) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది ?

(c) బిందువు Q(-2, -3) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?

(d) బిందువులు P, Q లు $\overline{AB}$ ని ఎన్ని సమానభాగాలుగా విభజిస్తాయి ?

(e) P, Q లను ఏమంటారు ?

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

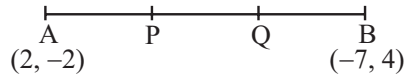
7.7 రేఖ యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు

ఒక రేఖాఖండమును మూడు సమానభాగాలుగా విభజించు బిందువులను "త్రిథాకరణ బిందువులు" అంటాం.

ఉదాహరణ-14. బిందువులు A(2,–2) మరియు B(–7, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు కనుగొనండి.

సాధన : AB రేఖాఖండం యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు P మరియు Qలు అనుకొనిన

AP=PQ=QB (పటంలో చూపినట్లు).



అందువల్ల AB రేఖాఖండాన్ని బిందువు P అంతరంగా 1 : 2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

కావున విభజన సూత్రం నుండి

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$$

ఇపుడు బిందువు Q కూడా AB రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

అందువల్ల బిందువు Q యొక్క నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$

అనగా $\left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$

కాబట్టి, AB రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు P(-1, 0) మరియు Q(-4, 2)

ఇవి చేయండి.

1. బిందువులు (2, –6) మరియు (–4, 8) లను కలుపు రేఖాఖండం యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులను కనుగొనండి.
2. బిందువులు (–3, –5), (–6, –8) లను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులను కనుగొనుము.

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ఉదాహరణ-15. బిందువులు (5, –6) మరియు (1, –4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును Y–అక్షము ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది? ఆ ఖండన బిందువును కనుగొనండి.

సాధన : బిందువులు A(5, –6) మరియు B(1, –4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండము AB ని Y–అక్షంపైనున్న బిందువు K : 1. నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకొనిన ఆ బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

$$\left(\frac{K(-1)+1(5)}{K+1}, \frac{K(-4)+1(-6)}{K+1}\right)$$

అనగా, $\left(\frac{-K+5}{K+1}, \frac{-4K-6}{K+1}\right)$

కాని Y-అక్షంపై నున్న బిందువు యొక్క నిరూపకాలలో x-నిరూపకం సున్న '0' అని మనకు తెలుసు.

కాబట్టి $\frac{-K+5}{K+1} = 0$

$-K + 5 = 0 \Rightarrow K = 5.$

అందువల్ల K : 1 = 5 : 1

K = 5 విలువను పై బిందువు నిరూపకాలలో ప్రతిక్షేపించగా

$$= \left(\frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4(5)-6}{5+1}\right) = \left(0, \frac{-20-6}{6}\right) = \left(0, \frac{-26}{6}\right) = \left(0, \frac{-13}{3}\right)$$

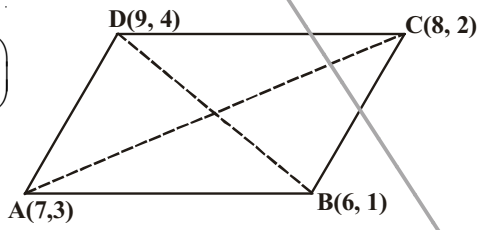
ఉదాహరణ-16. బిందువులు A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) మరియు D(9, 4) లు వరుసగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలని చూపండి.

సాధన : బిందువులు A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) మరియు D(9, 4) లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజం శీర్షాలు అనుకొనిన

సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని తెలుసు.

∴ అందువల్ల కర్ణాలు AC మరియు DB ల మధ్య బిందువులు సమానం కావాలి.

ఇపుడు $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ సూత్రమునుపయోగించి కర్ణాలు AC మరియు DB ల మధ్య బిందువును కనుగొందాం.



AC మధ్యబిందువు $= \left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

DB మధ్యబిందువు $= \left(\frac{9+6}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

దీని నుండి, AC మధ్యబిందువు = DB మధ్యబిందువు.

కాబట్టి బిందువులు A, B, C, D లు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలు అవుతాయి.

Downloaded from www.apteachers.in

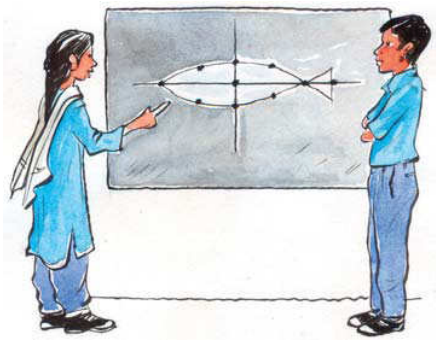
www.apteachers.in

ఉదాహరణ-17. బిందువులు A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) మరియు D(p, 3) లు వరుసగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలయిన P యొక్క విలువను కనుగొనండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని మనకు తెలుసు.

కాబట్టి AC మధ్యబిందువు = BD మధ్యబిందువు

అనగా $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$



$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$15 = 8 + p \Rightarrow p = 7.$$

అభ్యాసం - 7.2

1. బిందువులు (–1, 7) మరియు (4, –3) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును 2 : 3 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.
2. బిందువులు (4, –1) మరియు (–2, –3) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువుల నిరూపకాలను కనుగొనండి.
3. బిందువులు (–3, 10) మరియు (6, –8) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును బిందువు (–1, 6) ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుగొనండి.
4. బిందువులు (1, 2), (4, y), (x, 6) మరియు (3, 5) లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలయిన x, yల విలువలు కనుగొనండి.
5. AB వ్యాసంగా గల వృత్తం యొక్క కేంద్రము (2, –3) మరియు వృత్తంపై నున్న ఒక బిందువు B(1, 4) అయిన A బిందువు యొక్క నిరూపకాలు కనుగొనండి.
6. బిందువులు A, Bలు వరుసగా (–2, –2) మరియు (2, –4). AB రేఖాఖండంపై $AP = \frac{3}{7}$ అయ్యే విధంగా P బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.
7. బిందువులు A(–4, 0) మరియు B(0, 6) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును నాలుగు సమభాగాలుగా విభజించు బిందువుల నిరూపకాలను కనుగొనండి.

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

8. బిందువులు A(–2, 2) మరియు B(2, 8) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజించు బిందువుల నిరూపకాలు కనుగొనండి.

9. బిందువులు $(a + b, a - b)$ మరియు $(a - b, a + b)$ లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును అంతరంగా 3 : 2 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనండి.

10. కింద ఇవ్వబడిన బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రమును కనుగొనండి.

i. (-1, 3), (6, -3) మరియు (-3, 6) ii. (6, 2), (0, 0) మరియు (4, -7)

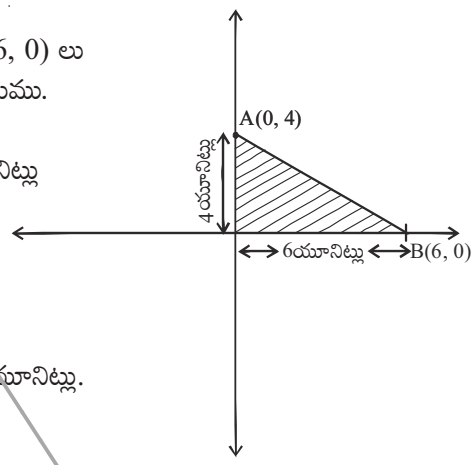
iii. (1, -1), (0, 6) మరియు (-3, 0)

7.8 త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం

పటంలో చూపినట్లు బిందువులు A(0, 4) మరియు B(6, 0) లు మూలబిందువు O తో ఒక త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తుందని అనుకొనుము.

ΔAOB త్రిభుజ వైశాల్యము ఎంత ?

ΔAOB ఒక లంబకోణత్రిభుజం. దాని భూమి 6 యూనిట్లు (x నిరూపకం) మరియు ఎత్తు 4 యూనిట్లు (y నిరూపకం).



$\therefore$ ΔAOB త్రిభుజవైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ చదరపు యూనిట్లు.

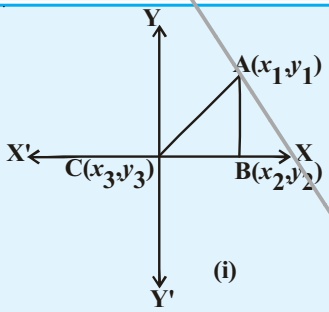
ప్రయత్నించండి

ఏదేని ఒక బిందువు Aను X–అక్షంపై, మరొక బిందువు Bను Y–అక్షంపై తీసుకొని త్రిభుజం వైశాల్యం కనుగొనండి. మీ మిత్రులు చేసిన వాటిని గమనించండి. మీరేం గమనించారు?

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

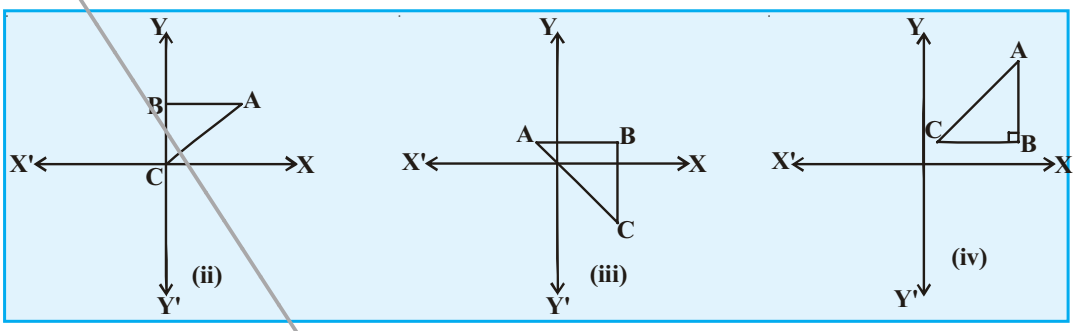
నిరూపకతలంపై ఉన్నవనుకొనుము. అయిన కింది త్రిభుజాల యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. మరియు వాటి వైశాల్యముల గురించి గ్రూపులలో మీస్నేహితులతో చర్చించండి.



(i)

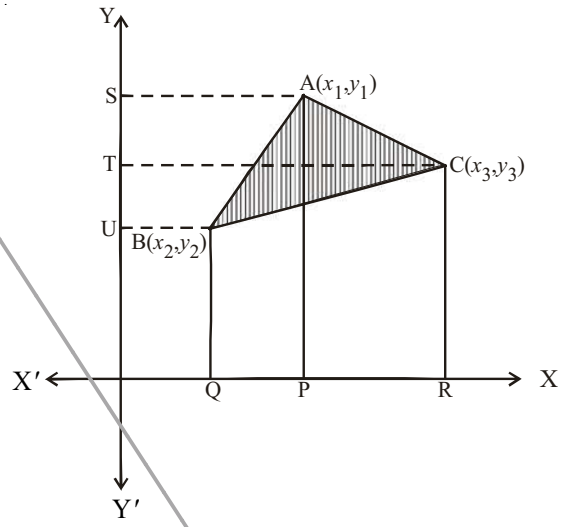
Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in



త్రిభుజ వైశాల్యం :-

ఏదేని ఒక త్రిభుజం ABC గా తీసుకుందాం. అది బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం అనుకుందాం. A, B మరియు C ల నుండి వరుసగా x-అక్షంపైకి AP, BQ మరియు CR అనే లంబరేఖలు గీయండి.



పటంలో చూపినట్లుగా ABQP, APRC మరియు BQRC లు ట్రెపిజియంలను ఏర్పరుస్తాయి.

ఇప్పుడు పటం నుండి

ΔABC వైశాల్యం = ట్రెపీజియం ABQP వైశాల్యం + ట్రెపీజియం APRC వైశాల్యం − ట్రెపీజియం BQRC వైశాల్యం

ఇప్పుడు పటం నుండి

$$\Delta ABC \text{ వైశాల్యం } = \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR$$

($\because$ ట్రెపీజియం వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) (వాటి మధ్య లంబదూరం))

ఇపుడు, పటం నుండి

$BQ = y_2,\ AP = y_1,\ QP = OP - OQ = x_1 - x_2$

$CR = y_3,\ PR = OR - OP = x_3 - x_1$

$QR = OR - OQ = x_3 - x_2$

కాబట్టి,

$$= \frac{1}{2}\left|(y_2 + y_1)\ (x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)\ (x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_3 + y_3)\ (x_3 - x_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

కాబట్టి, ΔABC వైశాల్యంను దాని విలువను కనుగొనుటకు సూత్రం

$$\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

ఇపుడు కొన్ని ఉదాహరణ సమస్యల సాధన పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-18. బిందువులు (1, –1), (–4, 6) మరియు (–3, –5) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : ΔABC త్రిభుజ శీర్షాలు $A(1,-1), B(-4,6), C(-3,-5)$, లు అనుకొని దాని వైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రం

$$=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|1(6+5)+(-4)(-5+1)+(-3)(-1-6)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|11+16+21\right|=24$$

కాబట్టి ΔABC వైశాల్యం 24 చదరపు యూనిట్లు.

ఉదాహరణ-19. బిందువులు A(5, 2), B(4, 7) మరియు C(7, –4)లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : బిందువులు A(5, 2), B(4, 7) మరియు C(7, –4) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజవైశాల్యం

$$\frac{1}{2}\left|5(7+4)+4(-4-2)+7(2-7)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|55-24-35\right|=\frac{-4}{2}=\left|-2\right|$$

వైశాల్యము అనేది కొలతలకు సంబంధించినది. దీనిని ఋణవిలువలతో సూచించలేము కాబట్టి దీని పరమమూల్య విలువతో సూచిస్తాము. అందువల్ల

$$|-2|=2.$$

అందువల్ల, త్రిభుజవైశాల్యం = 2 చదరపు యూనిట్లు.

ఇవి చేయండి

కింద ఇవ్వబడిన శీర్షాలు గల త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనండి.

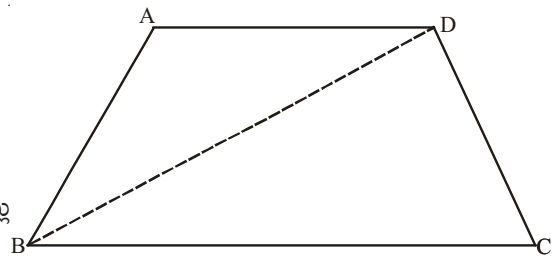
1. (5, 2) (3, –5) మరియు (–5, –1)
2. (6, –6), (3, –7) మరియు(3, 3)

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ఉదాహరణ-20. బిందువులు A(–5, 7), B(–4,–5), C(–1, –6) మరియు D(4,5) లు ఒక చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలు అయిన □ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన : బిందువులు B, D లను కలిపినచో మనకు ΔABD మరియు ΔBCD అనే రెండు త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి.



ΔABD త్రిభుజవైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\left|-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|50+8+48\right| = \frac{106}{2} = 53$$ చదరపుయూనిట్లు

అదేవిధంగా ΔBCD వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|44-10+4\right| = 19$ చదరపు యూనిట్లు.

ఇపుడు ΔABD వైశాల్యం + ΔBCD వైశాల్యం= 53+19 = 72 చదరపు యూనిట్లు

అందువల్ల □ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం = 72 చదరపు యూనిట్లు

ప్రయత్నించండి

బిందువులు (0, –1), (2, 1) (0, 3) మరియు (–2, 1) లు శీర్షాలుగా గల చతురస్రము యొక్క వైశాల్యము కనుగొనండి.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

కింది బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజవైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

(i) (2, 0), (1, 2) (–1, 6)

(ii) (3, –1), (5, 0), (1, –2)

(iii) (–1.5, 3), (6, –2), (–3, 4)

మీరేం గమనించారు ?

ఈ బిందువులను మూడు వేర్వేరు గ్రాఫులలో గుర్తించండి.

మీరేం గమనించారు. మీ మిత్రులతో చర్చించండి.

వైశాల్యం 0(సున్నా) చ.యూనిట్లు గల త్రిభుజమును గీయగలమా? మరి దీని అర్థమేమిటి ?

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

7.8.1. బిందువుల సరేఖీయత

బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ ఒకే రేఖపై ఉన్నవనుకుందాం. అపుడు అవి త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచలేవు. అనగా ΔABC త్రిభుజవైశాల్యం సున్నా '0'.

ఎప్పుడైతే మూడు బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యం సున్నా '0' అవుతుందో అప్పుడు ఆ మూడు బిందువులను సరేఖీయ బిందువులు అంటాం.

ఉదాహరణ-21. ఒక తలంలో ఉన్న బిందువులు (3, –2) (–2, 8) మరియు (0, 4)లు సరేఖీయ బిందువులు అని చూపండి.

సాధన : త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొను సూత్రంనుపయోగించి

$$= \frac{1}{2}\left|3(8-4)+(-2)(4-(-2))+0((-2)-8)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|12-12\right| = 0$$

త్రిభుజవైశాల్యం సున్నా '0'. కాబట్టి పైన పేర్కొన్న బిందువులు సరేఖీయ బిందువులు.

ఇవి చేయండి

కింద ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయాలు అవుతాయా? కావా? సరి చూడండి.

(i) (1, –1) (4, 1), (–2, –3)

(ii) (1, –1), (2, 3), (2, 0)

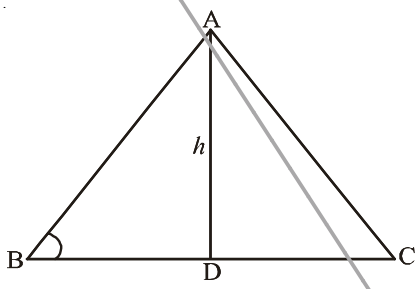
(iii) (1, –6), (3, –4), (4, –3)

7.8.2. త్రిభుజవైశాల్యం – "హెరాన్ సూత్రం"

త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రం $\frac{1}{2}$ ×భూమి × ఎత్తు అని మనకు తెలుసు.

ఒకవేళ ఇచ్చిన త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజం, సమబాహు త్రిభుజం, సమద్విబాహు త్రిభుజాలతో ఏదైనా కావచ్చు. అపుడు ఆ త్రిభుజ వైశాల్యం మనం కనుగొనగలమా ?

త్రిభుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు తెలిసినపుడు వాటి విలువలను పై సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించి సులభంగా ఆ త్రిభుజ వైశాల్యంను మనం తెలుసుకుంటాం.



ఉదాహరణకు ఇచ్చిన త్రిభుజం విషమబాహు త్రిభుజం అయితే దాని యొక్క భుజాల పొడవులు మాత్రమే తెలుస్తాయి. కాని ఎత్తు తెలియదు.

అపుడు, దాని వైశాల్యం ఎలా కనుగొంటాం ?

పైన తెలిపిన వైశాల్యం సూత్రంలో విలువలు ప్రతిక్షేపించాలంటే తప్పకుండా త్రిభుజం ఎత్తు మనకు తెలిసి ఉండాలి.

Downloaded from www.apteachers.in

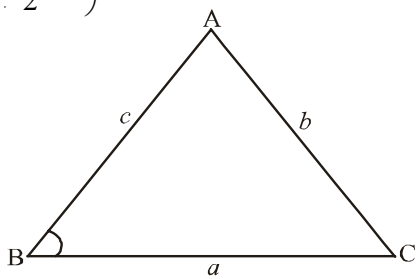
www.apteachers.in

కాబట్టి, "హెరాన్" అనే గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త a, b, c భుజాల పొడవులు కలలిగిన త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రమును కనుగొన్నాడు. అది

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}, \qquad \left(\because S = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

ఉదాహరణకు, 12మీ, 9మీ, 15మీ పొడవులు గల భుజాలతో ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యంను "హెరాన్ సూత్రం" ను ఉపయోగించి కనుక్కొందాం.

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}, \qquad \left(\because S = \frac{a+b+c}{2}\right)$$



$$S = \frac{12+9+15}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ మీ}$$

అపుడు $S - a = 18 - 12 = 6$మీ.

$S - b = 18 - 9 = 9$మీ

$S - c = 18 - 15 = 3$మీ.

$A = \sqrt{18(6)(9)(3)} = \sqrt{2916} = 54$ చదరపు మీటర్లు.

ఇవి చేయండి

(i) 15మీ, 17మీ, 21మీ భుజాలుగా గల త్రిభుజం వైశాల్యం (హెరాన్ సూత్రం ద్వారా) కనుగొనండి. మరియు మీ సమాధానాన్ని $A = \frac{1}{2}bh$ లో ప్రతిక్షేపించి సరిచూసుకోండి.

(ii) బిందువులు (0, 0), (4, 0) మరియు (4, −3)లతో ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యంను హెరాన్ సూత్రం ద్వారా కనుగొనండి.

ఉదాహరణ-22. బిందువులు (1, 2), (−1, b), (−3, −4) సరేఖీయాలైతే 'b' విలువను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులు A(1, 2), B(−1, b), C(−3, −4) అనుకొనుము.

$x_1 = 1, y_1 = 2,\ x_2 = -1, y_2 = b,\ x_3 = -3, y_3 = -4$ అవుతాయి.

ఇక ΔABC వై $= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$ అని తెలుసు.

$\therefore \frac{1}{2}\left|1(b+4) + (-1)(-4-2) + (-3)(2+b)\right| = 0$ అవుతుంది. ($\because$ ఇచ్చిన బిందువులు సరేఖీయాలు)

$$|b + 4 + 6 - 6 + 3b| = 0$$

$$|4b + 4| = 0$$

$$4b + 4 = 0$$

$$b = -1.$$

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

అభ్యాసం - 7.3

1. కింద ఇవ్వబడిన బిందువులు శీర్షాలుగా కలిగిన త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.
   (i) (2, 3) (–1, 0), (2, –4) (ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)
   (iii) (0, 0), (3, 0) మరియు (0, 2)
2. కింద ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయాలైతే 'K' విలువను కనుగొనండి.
   (i) (7, –2) (5, 1) (3, K) (ii) (8, 1), (K, –4), (2, –5)
   (iii) (K, K) (2, 3) మరియు (4, –1).
3. బిందువులు (0, –1), (2, 1) మరియు (0, 3) శీర్షాలు కలిగిన త్రిభుజవైశాల్యం, మరియు దాని భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపగా ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
4. బిందువులు (–4, –2), (–3, –5), (3, –2) మరియు (2, 3) శీర్షాలుగా గల చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి.
5. బిందువులు (8, –5), (–2,7) మరియు (5, 1) లచే ఏర్పడు త్రిభుజవైశాల్యాన్ని హెరాన్ సూత్రాన్నుపయోగించి కనుక్కోండి.

7.9 సరళరేఖ

భరద్వాజ్ మరియు మీనాలు రెండు చలరాశులు కల్గిన రేఖీయ సమీకరణంనకు సాధనలు కనుగొనడం గురించి చర్చించుకొంటున్నారు.

భరద్వాజ్ : నీవు $2x + 3y = 12$ కు సాధనలు కనుగొనగలవా?

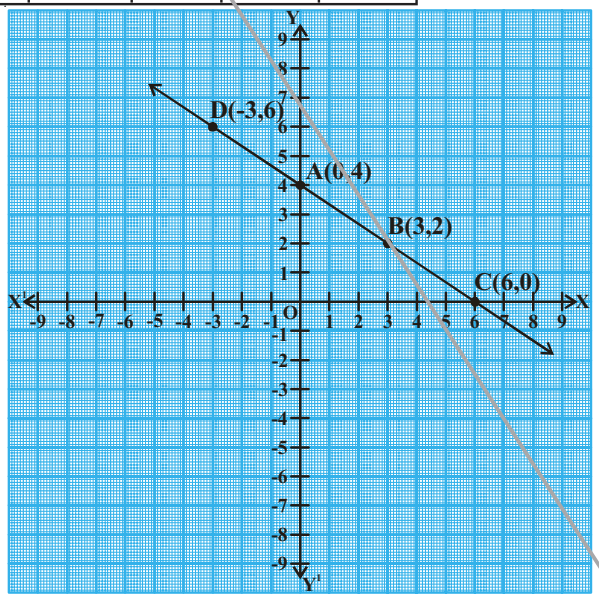
మీన : అవును, నేను ఇలా చేశాను, చూడు

x	0	3	6	–3
y	4	2	0	6

$$2x+3y = 12$$

$$3y = 12 - 2x$$

$$y = \frac{12-2x}{3}$$



మీన : నీవు ఈ సాధనలను క్రమయుగ్మాల రూపంలో రాయగలవా?

భరద్వాజ్ : అవును (0, 4), (3, 2), (6, 0), (–3, 6)

మీనా, నీవు ఈ బిందువులను నిరూపక తలంపై గుర్తించగలవా ?

మీన: నేను ఇలా చేశాను. ఈ బిందువులను కలుపుతూ రేఖను గీసాను. చూడు

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

భరద్వాజ్ : ఈ రేఖ దేనిని సూచిస్తుంది

మీన : ఇది ఒక సరళరేఖ

భరద్వాజ్ : ఈ రేఖపై మరికొన్ని బిందువులను గుర్తించగలవా ?

ఈ రేఖపై మరికొన్ని బిందువులు గుర్తించడంలో మీరు మీనాకు సహాయపడగలరా?

....., ..., ..., ...

ఈ రేఖలో $\overline{AB}$ ని ఏమంటారు?

$\overline{AB}$ అనునది ఒక సరళరేఖాఖండము

ఇవి చేయండి

కిందనీయబడిన బిందువులను నిరూపకతలంపై గుర్తించి వాటిని కలుపుము

(1) A(1, 2), B(–3, 4), C(7, –1)

(2) P(3, –5) Q(5, –1), R(2, 1), S(1, 2)

ఇందులో ఏది సరళరేఖను సూచిస్తుంది ? ఏది సూచించదు? ఎందుకు?

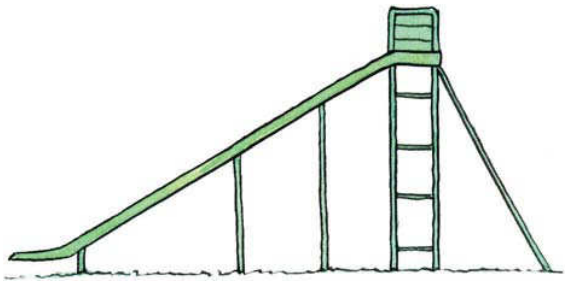
ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

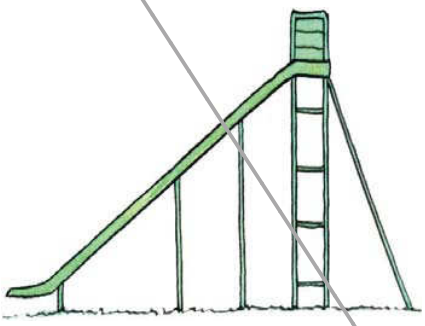
$y = x + 7$ సమీకరణం ఒక సరళరేఖను సూచిస్తుందా? నిరూపకతలంలో గీసి చూడండి.

ఈ సరళరేఖ X –అక్షాన్ని ఏ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది? అదే విధంగా ఈ సరళరేఖ Y–అక్షంతో ఎంత కోణం చేస్తుంది? మీ మిత్రులతో చర్చించండి.

7.9.1 సరళరేఖవాలు

మీరు పార్కులో జారుడు నిచ్చెన చూసే వుంటారు. ఇక్కడ రెండు జారుడు నిచ్చెనలు ఇవ్వబడినవి. దేని మీది నుండి మీరు వేగంగా జారగలరు?



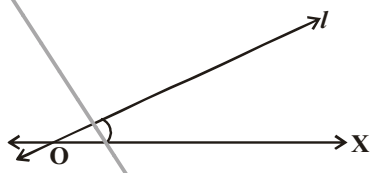


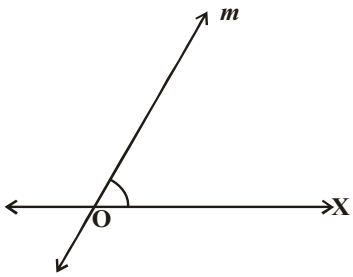
మీరు చెప్పేది "రెండవది" అని అవును కదూ! ఎందుకు ?

కింది రేఖలను పరిశీలించండి.

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in





OX తో ఏ రేఖ ఎక్కువ కోణం చేయుచున్నది ?

OX తో రేఖ "l" చేసే కోణం కన్నా రేఖ 'm' చేసే కోణం ఎక్కువ. అందువల్ల

OX దృష్ట్యా రేఖ 'l' కన్నా రేఖ 'm' వాలు ఎక్కువ.

ఒక రేఖ యొక్క వాలును ఎలా కనుగొంటాం?

కృత్యం

పటంలోని రేఖను పరిశీలించి దానిపై గల బిందువులను గుర్తిస్తూ కింది పట్టికను పూరించండి.

x నిరూపకం	1	-	-	4	-
y నిరూపకం	2	3	4	-	6

x నిరూపకాలు మారుతున్న కొలది y నిరూపకాలు మారుతున్నవని మనం గమనించవచ్చు.

y నిరూపకాలు $y_1 = 2$ నుండి $y_2 = 3$కు పెరిగినపుడు

y నిరూపకంలో భేదం = ...

అప్పుడు x నిరూపకంలో భేదం = ...

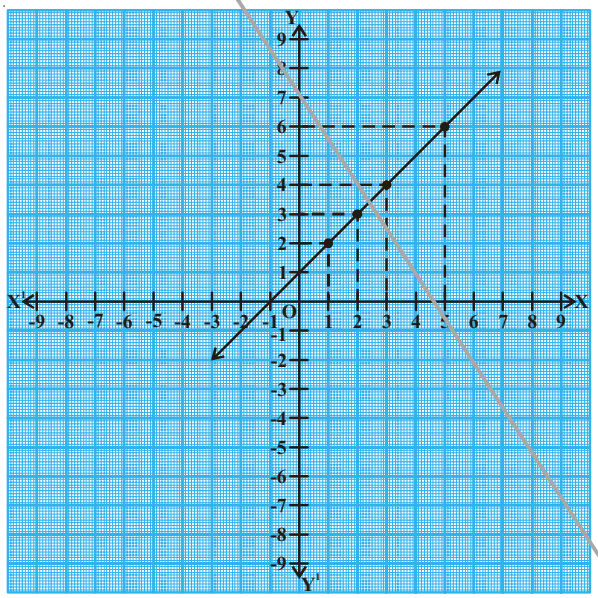
$$\therefore \frac{y \text{ నిరూపకంలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}} = \text{.....}$$

y నిరూపకాలు $y_1 = 2, y_3 = 4$ కు పెరిగినపుడు

y నిరూపకంలో భేదం = ...

అప్పుడు x నిరూపకంలో భేదం .....

$$\therefore \frac{y \text{ నిరూపకంలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}} = \text{.....}$$



Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ఇంకా ఆరేఖపై మరికొన్ని బిందువులను గుర్తించి ఏవైనా రెండు బిందువులలో నిరూపకాలను గమనిస్తూ కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి.

y నిరూపకం		y నిరూపకంలో భేదం	x	x నిరూపకంలో భేదం		$\frac{y \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}$
2	4	-	1	2	1	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

పై కృత్యం నుండి మీరేమి గ్రహించారు ?

ఒకరేఖపై నున్న బిందువుల నిరూపకాలలో y నిరూపకాల మార్పుకు మరియు x నిరూపకాలలో మార్పుకు గల నిష్పత్తికి, ఆరేఖ X-అక్షంతో చేయుచున్న కోణానికి సంబంధం ఉంది.

త్రికోణమితి అధ్యాయంలో మీరు $\tan\theta$ భావనను నేర్చుకుంటారు.

అనగా $\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\text{కోణం 'θ' కు ఎదుటిభుజం}}{\text{కోణం 'θ' కు ఆసన్నభుజం}} = \dfrac{y \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}$

7.9.2 రెండు బిందువులను కలిపే రేఖ వాలు

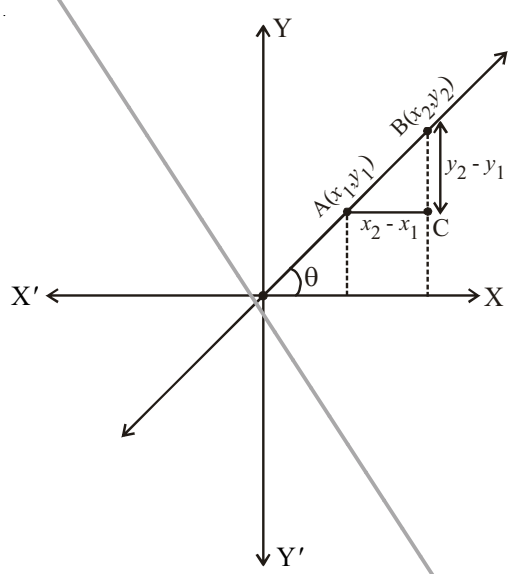
రేఖ 'l' పై $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ రెండు బిందువులను కుందాం (పటంలో చూపినట్లు)

రేఖ యొక్క వాలు $= \dfrac{y \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}{x \text{ నిరూపకాలలో భేదం}}$

రేఖాఖండం $\overline{AB}$ వాలు $= m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

వాలును 'm' తో సూచిస్తారు. మరియు రేఖ 'l' X –అక్షంతో 'θ' కోణం చేస్తుంది.

అందువల్ల రేఖాఖండం $\overline{AB}$ అనునది రేఖ $\overline{AC}$ తో కూడా 'θ' కోణం చేస్తుంది.



$\therefore \tan\theta = \dfrac{\text{కోణం 'θ' కు ఎదుటిభుజం}}{\text{కోణం 'θ' కు ఆసన్నభుజం}}$

$= \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore \quad \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

$\therefore m = \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ఇది బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడిన రేఖాఖండం $\overline{AB}$ యొక్క వాలును కనుగొనుటకు సూత్రం.

X-అక్షంతో రేఖ చేయు కోణం 'θ' అయితే, అపుడు వాలు $m = \tan\theta$.

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

ఉదాహరణ-23. ఒక రేఖాఖండం యొక్క తొలి, చివరిబిందువులు వరుసగా (2, 3), (4, 5). ఆ రేఖాఖండం యొక్క వాలును కనుగొనండి.

సాధన : రేఖాఖండం యొక్క తొలి, చివరి బిందువులు (2, 3), (4, 5) అయిన ఆ రేఖాఖండం వాలు

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

ఇచ్చిన రేఖాఖండం యొక్క వాలు = 1.

ఇవి చేయండి.

కింది బిందువులతో ఏర్పడు రేఖాఖండము $\overline{AB}$ వాలును కనుగొనండి.

1. A(4, –6) B(7, 2)
2. A(8, –4), B(–4, 8)
3. A(–2, –5), B(1, –7)

ప్రయత్నించండి

కింద ఇవ్వబడిన బిందువులు $\overline{AB}$ రేఖపై ఉన్నవి. $\overline{AB}$ రేఖ వాలు కనుగొనండి.

1. A(2, 1), B(2, 6)
2. A(–4, 2), B(–4, –2)
3. A(–2, 8), B(–2, –2)
4. "ఇచ్చిన బిందువులతో ఏర్పడు $\overline{AB}$ రేఖాఖండం Y–అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది". ఈ వాక్యము సరైనదేనా? ఎందుకు? అయితే వాలు ఏవిధంగా ఉంటుంది.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

బిందువులు A(3, 2), (–8, 2) లు $\overline{AB}$ రేఖపై ఉన్నచో ఆ రేఖ వాలును కనుగొనండి.

$\overline{AB}$ రేఖ ఎప్పుడు X-అక్షమునకు సమాంతరంగా ఉంటుంది? ఎందుకు? మీ స్నేహితులతో గ్రూపులలో చర్చించండి.

ఉదాహరణ-24. బిందువులు P(2, 5) మరియు Q(x, 3) ల గుండా పోయే రేఖవాలు 2 అయిన x విలువను కనుగొనుము.

సాధన : బిందువులు P(2, 5) మరియు Q(x, 3) ల గుండా పోయేరేఖ వాలు 2.

ఇక్కడ, $x_1 = 2,\ y_1 = 5,\ x_2 = x,\ y_2 = 3$

PQ రేఖవాలు $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2 = \dfrac{3-5}{x-2} = \dfrac{-2}{x-2}$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-2} = 2 \Rightarrow -2 = 2x - 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Downloaded from www.apteachers.in

www.apteachers.in

అభ్యాసం - 7.4

1. రెండు బిందువులను కలుపుచూ గీయబడిన రేఖవాలు కనుగొనండి

   (i) $(4, -8)$ మరియు $(5, -2)$

   (ii) $(0, 0)$ మరియు $(\sqrt{3}, 3)$

   (iii) $(2a, 3b)$ మరియు $(a, -b)$

   (iv) $(a, 0)$ మరియు $(0, b)$

   (v) $A(-1.4, -3.7)$, $B(-2.4, 1.3)$

   (vi) $A(3, -2)$, $B(-6, -2)$

   (vii) $A\left(-3\frac{1}{2}, 3\right)$, $B\left(-7, 2\frac{1}{2}\right)$

   (viii) $A(0, 4)$, $B(4, 0)$

ఐచ్ఛిక అభ్యాసం

[ఈ అభ్యాసంలోని ప్రశ్నలు పరీక్షలో ఇవ్వడం కోసం కాదు]

1. వృత్తం 'Q' యొక్క కేంద్రం Y-అక్షంపై ఉన్నది. మరియు ఈ వృత్తం బిందువులు (0, 7) మరియు (0, −1)ల గుండా పోతుంది. వృత్తం 'Q' ధన X-అక్షాన్ని బిందువు (P, 0) వద్ద ఖండించిన 'P' విలువ ఎంత?
2. బిందువులు $A(2, 3)$, $B(-2, -3)$ మరియు $C(4, 23)$ శీర్షాలతో త్రిభుజం ΔABC ఏర్పడినది. భుజం BC మరియు శీర్షం A యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖల ఖండన బిందువును కనుగొనండి.
3. సమబాహు త్రిభుజం ΔABC యొక్క భుజం BC X- అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంది. దాని భుజాలు BC, CA, ABల గుండా పోయే సరళరేఖల వాలులు కనుగొనుము.
4. $a > b$ అయ్యేటట్లు భుజాలు 'a', 'b' లు కలిగిన ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ΔABC ఉంది. దానిలో లంబకోణం యొక్క సమద్విఖండన రేఖ ద్వారా ఏర్పడిన రెండు చిన్న త్రిభుజాల లంబకేంద్రాల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనుము.
5. $2x + 3y - 6 = 0$ అను సరళరేఖ నిరూపకాక్షాలతో చేసే త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రంను కనుగొనుము.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. రెండు బిందువులు $P(x, y)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ ల మధ్యదూరం $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
2. మూలబిందువు నుండి ఒక బిందువు (x, y)ల మధ్యదూరం $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Downloaded from www.apteachers.in

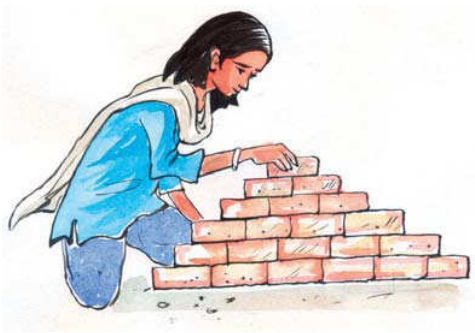
www.apteachers.in

3. Y-అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉండి (x_1, y_1) మరియు (x_1, y_2) బిందువుల మధ్యదూరం $|y_2 - y_1|$.
4. X- అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉండి (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువుల మధ్యదూరం $|x_2 - x_1|$.
5. బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును బిందువు $P(x, y)$ $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తే P బిందువు నిరూపకాలు $\left[\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right]$.
6. రెండు బిందువులు (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
7. ఒక త్రిభుజంలోని మధ్యగతరేఖలను 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు దాని గురుత్వకేంద్రం.
8. ఒక త్రిభుజం యొక్క మధ్యగతరేఖల మిళిత బిందువును ఆ త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్రం అంటారు. గురుత్వకేంద్రం నిరూపకాలు $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.
9. బిందువులు (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3) లచే ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యం

   $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$
10. త్రిభుజ వైశాల్యం – హెరాన్ సూత్రం

    $$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \qquad \left(\because S = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

    (a, b, c లు ΔABC యొక్క భుజాలు)
11. సరళరేఖ వాలు $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



Downloaded from www.apteachers.in