అనుబంధం

గణిత నమూనా విధానాలు

(Mathematical Modelling)

A.I.1 పరిచయం

శాస్త్ర, సాంకేతిక రంగాలలో అమెరికా, రష్యా, జపాన్ వంటి అగ్రదేశాల సరసన నిలిచిన భారతదేశంలో ఫిబ్రవరి 25, 2013న ఇస్రో (భారత అంతరిక్ష పరిశోధనా సంస్థ) వారు PSLV C20, అనే వాహన నౌక ద్వారా సరల్ (SARAL) అనే ఉపగ్రహంను కక్ష్యలో ప్రవేశపెట్టినారు. ఈ శాటిలైట్ యొక్క బరువు సుమారు 407 కి.గ్రా మరియు ఇది భూమి నుండి 781 కి.మీ ఎత్తులో ఉంటూ 98.5^o ల కోణంతో కక్ష్యలో పరిభ్రమణం చేస్తుంది.

పై సమాచారాన్ని చదివిన మనకు సహజంగానే కొన్ని సందేహాలు తలెత్తుతాయి. అవి ఏంటంటే

(i) శాస్త్రవేత్తలు, శాటిలైట్ 781కిమీల ఎత్తులో పరిభ్రమిస్తుందని అంత ఖచ్చితంగా ఎలా చెప్పగలిగారు. నిజంగానే వారు అంతరిక్షానికి వెళ్ళి దూరాన్ని కొలిచి చూశారా ?

(ii) భ్రమణ కోణం 98.5^o లు అని ఎలా నిర్ధారించగలిగారు ?

మన నిజజీవితంలోని కొన్ని అద్భుతమైన విషయాలు, మనల్ని ఆశ్చర్యచకితుల్ని చేస్తాయి. అసలు గణిత మేధావులు గాని శాస్త్రవేత్తలు గాని ఇంత ఖచ్చితంగా ఈ విలువలను ఎలా అంచనా వేయగలిగారు ? అని మనం నివ్వెర పోతాము. అలాంటి ఉదా॥లు కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాము.

(i) సూర్యుని ఉపరితలంపైన ఉష్ణోగ్రత దాదాపు $6,000^oC$ ఉంటుంది.

(ii) మానవుని గుండె ప్రతీ నిమిషానికి ఒకసారి 5 నుండి 6 లీ॥ల రక్తాన్ని శుద్ధి చేస్తుంది.

(iii) సూర్యునికి, భూమికి మధ్య దూరము 1,49,000 కిమీ॥లు.

పైన పేర్కొన్న ఉదా॥లలో ఏ శాస్త్రవేత్త కూడ సూర్యుని పైకి వెళ్ళి అక్కడి ఉష్ణోగ్రతను కొలవలేదు. అదేవిధంగా మనిషి గుండెను బయటకు తీసి అది ఎన్ని లీ॥ల రక్తాన్ని శుద్ధి చేస్తుందో పరిశీలించలేదు.

మరి ఇలాంటి ప్రశ్నలకు ఇంత ఖచ్చితమైన సమాధానాన్ని ఎలా చెప్పగలిగారు ?

"గణితనమూనా విధానం" ద్వారా ఇలాంటి ఊహకు అందని ప్రశ్నలకు ఖచ్చితమైన పరిష్కారాన్ని కనుక్కోగల్గుతాము.

"గణితనమూనా విధానం అనేది కేవలం శాస్త్రజ్ఞులు, మేధావులకు మాత్రమే ఉపయోగపడుతుందనుకోవడం పొరపాటే అవుతుంది. ఎందుకంటే మన నిజజీవితంలో ఎన్నో సందర్భాలలో గణిత నమూనా ప్రక్రియను ఉపయోగించి మన సమస్యలను పరిష్కరించుకుంటాము. ఉదా॥కు మనం రూ. 100 లను వేరేవారికి 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి అప్పుగా ఇస్తే 1 సం॥ కాలం తర్వాత మనకు ఎంత డబ్బు వస్తుందో తెలుసుకోవాలి, లేదా మన ఇంటి గది గోడలన్నింటికి రంగు వేయించాలంటే ఎన్ని లీ॥ల పెయింట్ అవసరమో కనుక్కునే సందర్భాలలో మనకు గణిత నమూనా ప్రక్రియ ఉపయోగపడుతుంది.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

మనం నేరుగా కొలవలేని సందర్భాలలో గణిత నమూనా ప్రక్రియను ఉపయోగించి ఖచ్చితమైన విలువలను అంచనా వేయగలిగిన, నిజజీవిత సన్నివేశాలలోని మరికొన్ని ఉదా॥లను మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

A.II.2 గణిత నమూనాలు

త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుగొనుటకు ఏ సూత్రం వాడుతామో మీకు గుర్తుందా ?

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు కదా !

అదే విధంగా సాధారణ వడ్డీ కనుగొనుటకు సూత్రం $I = \frac{PTR}{100}$; ఈ సూత్రం లేదా సమీకరణం అనేది వడ్డీ (I); అసలు(P); కాలం (T); మరియు వడ్డీ రేటు (R). ల మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది.

ఈ సూత్రాలను మనం గణిత నమూనాలకు ఉదాహరణలుగా చెప్పుకోవచ్చు.

గణిత నమూనాలకు సంబంధించి మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

(i) వేగం (S) = $\frac{\text{దూరం (d)}}{\text{కాలం (t)}}$

(ii) చక్రవడ్డీలో మొత్తం (A) $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

ఇచట P = అసలు

r = వడ్డీరేటు

n = వడ్డీ కట్టే పర్యాయముల సంఖ్య

కాబట్టి,

> నిజజీవిత సందర్భాలలో మనం ఉపయోగించే గణిత వివరణలు లేదా గణిత సూత్రాలే "గణిత నమూనాలు".

ఇవి చేయండి

మీరు క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న "గణిత నమూనాలు" కొన్నింటిని రాయండి.

A.I.3 గణిత నమూనా విధానం

మన దైనందిన జీవితంలోని కొన్ని సందర్భాలలో సమస్యలను ఎదుర్కోవాల్సి వస్తుంది. వాటిని పరిష్కరించుకోవడానికి మనం ఆ సమస్యకు సరిపడు గణిత సమీకరణంను రాసుకొని దాని సాధనను కనుగొంటాము. తర్వాత దశలో మనం కనుగొన్న సాధన; మన సమస్యకు పరిష్కారంగా సరిపోతుందో లేదో విశ్లేషించుకుంటాము. ఈ విధంగా ఒక గణిత నమూనాను నిర్మించుకొని; దాని ఆధారంగా సమస్యను సాధించే విధానంనే "గణిత నమూనా విధానం"గా వ్యవహరిస్తాము.

ఇప్పుడు గణితనమూనా విధానాలు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1. వాణి; ₹ 19,000 ధర కలిగిన ఒక వాషింగ్ మెషిన్‌ను కొనాలని అనుకొన్నది. కాని ఆమె వద్ద కేవలం ₹ 15,000 మాత్రమే ఉన్నాయి. మిగిలిన డబ్బుల కోసం ఆమె తన వద్ద ఉన్న రూపాయలను సం॥నికి 8% వడ్డీరేటు చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి అప్పుగా ఇవ్వాలనుకుంది. అయితే ఎన్ని సం॥ల తర్వాత వాణికి మిగిలిన డబ్బులు వచ్చి, తాను అనుకున్న వాషింగ్‌మెషిన్ కొనగలదు?

సాధన :

సోపానం 1 : (సమస్యను అవగాహన చేసుకోవడం): ఈ సోపానంలో మనం సమస్యను అర్థం చేసుకొనే ఏయే అంశాలు ఇవ్వబడ్డాయి ? ఇంకా ఏమి కనుగొనాల్సి ఉందో తెలుసుకుంటాము. ఈ సమస్యలో మనకు అసలు, వడ్డీరేటు ఇవ్వబడ్డాయి. వాణి అప్పుగా ఇచ్చిన అసలు ₹ 15,000; ఎన్ని సం॥ల తర్వాత ₹ 19000 అవుతాయో మనం కనుగొనాలి.

సోపానం 2 : (గణితపరమైన వివరణ మరియు సూత్రీకరణ) ఈ సోపానంలో ఇచ్చిన సమస్యలోని వివిధ పదాలకు విస్తృతార్థంలో వివరణ రాసుకొని చరరాశులను గుర్తిస్తాము. సమస్యకు సరిపడు సమీకరణం లేదా అసమీకరణాలను రాసుకొని అవసరమైన సమాచారాన్ని సేకరిస్తాము.

ఈ సమస్యలో మనం సాధారణ వడ్డీకి సంబంధించిన సూత్రం

$I = \frac{PTR}{100}$ (నమూనా) ను ఉపయోగిస్తాము. దీనిలో

P = అసలు T = కాలం (సం॥లలో) R = వడ్డీరేటు I = సాధారణ వడ్డీ

ఈ నమూనాలో మనం కాలం (T)ని కనుగొనాల్సి ఉంది. $T = \frac{100I}{RP}$ అవుతుంది.

సోపానం 3: (గణిత సమస్యను సాధించడం) : ఈ సోపానంలో, 2వ సోపానంలో అభివృద్ధి పరిచిన సూత్రాన్ని ఉపయోగించుకొని సమస్యను సాధిస్తాము. వాణి వద్ద ప్రస్తుతం ఉన్న డబ్బు కేవలం ₹ 15,000 మాత్రమే అని మనకు తెలుసు. ఇదే మనకు సమస్యలో అసలు (P) అవుతుంది.

₹ 19000 విలువ గల వాషింగ్‌మెషిన్ కొనడానికి వాణికి ఇంకా 19,000-15,000 = 4,000 అవసరం. అంటే ఇది వడ్డీ (I) కి సమానం.

$$P = ₹15,000 \quad R = 8\%, \quad I = 4000\ , \ T = \frac{100 \times 4,000}{15,000 \times 8} = \frac{400}{120}\ , \ T = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} \text{ సం॥లు}$$

సోపానం 4 : (సాధనను విశ్లేషించుకోవడం): పై సోపానంలో వచ్చిన సాధనను ఈ సోపానంలో విశ్లేషించుకుంటాము.

ఇక్కడ మనకు T = $3\frac{1}{3}$ సం॥లు అని వచ్చింది. అంటే 3సం॥లు మరియు ఇంకా సం॥లో 3వ వంతు అని లేదా 3 సం॥ల 4నెలలు అని అర్థం. అంటే వాణి 3 సం॥ల 4 నెలల తర్వాత తాను అనుకొన్న వాషింగ్ మెషిన్ కొనగలదు.

సోపానం 5 : (నమూనా యొక్క విశ్వసనీయత): సమస్యా సాధనలో వచ్చిన సాధన (ఫలితం) నిజజీవితానికి సరిపోతుందని అన్నిసార్లు విశ్వసించలేము. ఒక వేళ సాధన మనకు సరిపోదని అనిపిస్తే మళ్ళీ మళ్ళీ మన నమూనాని పరీక్షించుకుంటూ దానిని మెరుగుపరుచుకోవచ్చు.

ఈ సమస్యను సాధించే క్రమంలో మనం సమస్యలోని 2 అంశాలు ఎప్పటికీ మారవని ఊహించుకొని సమస్యను సాధించాము అవి i) వడ్డీరేటు ii) వాషింగ్ మెషిన్ ధర ప్రతీ సం॥ ₹ 19,000 ఉండడం. ఒకవేళ ఈ రెండు విలువలు మారితే $\frac{PTR}{100}$ అనే నమూనా మనకు వర్తించదు.

ఉదాహరణ-2. లోకేశ్వరం ఉన్నతపాఠశాలలో 10వ తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థులు మరియు వారి గణిత ఉపాధ్యాయుడు కలిసి లోకేశ్వరం నుండి హైదరాబాద్‌కు విహార యాత్రకు వెళ్ళాలని నిర్ణయించుకున్నారు. అయితే ఒక్కొక్క వాహనంలో డ్రైవర్ కాకుండా కేవలం 6 గురు వ్యక్తులు మాత్రమే కూర్చోగలరు. అయిన వారు ఎన్ని వాహనాలు అద్దెకు తీసుకోవాలి.

సోపానం 1 : ఈ సమస్యలో ఒక్కొక్క వాహన సామర్థ్యం డ్రైవర్ కాకుండా 6గురు వ్యక్తులు ఇవి ఇవ్వబడింది. 51 మంది ప్రయాణించడానికి అవసరమగు వాహనాల సంఖ్యను మనం కనుగొనాల్సి ఉంది.

సోపానం 2 : వాహనాల సంఖ్య = (మొత్తం వ్యక్తులు) / (ఒక్కొక్క వాహన సామర్థ్యం)

సోపానం 3 : వాహనాల సంఖ్య = 51/6 = 8.5

సోపానం 4 (వ్యాఖ్యానం/విశ్లేషణ): వాహనాల సంఖ్య 8.5 గా ఉండదని మనకు తెలుసు. కాబట్టి వారు అద్దెకు తీసుకోవాల్సిన వాహనాల సంఖ్య, 8.5కు దగ్గరి పూర్ణాంకమైన 9 గా ఉండాలి

$\therefore$ కావాల్సిన వాహనాల సంఖ్య = 9

సోపానం 5 (విశ్వసనీయత) : ఈ గణిత నమూనాలో మనం సన్నగా ఉన్న విద్యార్థులు; లావుగా ఉన్న విద్యార్థులు అందరూ సమాన స్థలాన్ని ఆక్రమించి కూర్చుంటారని భావించి సమస్యను సాధించాము. అలా భావించకపోతే ఈ నమూనా మనకు ఉపయోగపడదు.

ప్రయత్నించండి

1. మీ గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని ఏదైనా ఒక రాత సమస్యను తీసుకొని దానికి గణిత నమూనాను తయారు చేసి ఆ సమస్య సాధనను కనుగొనండి.
2. ఒక కారు 'A' అనే స్థానం నుండి బయలుదేరి 40 కి.మీ/గం. వేగంతో ప్రయాణించి "B" అనే గమ్యస్థానాన్ని చేరుకుంది. అదే సమయంలో మరో కారు "B" నుండి బయలుదేరి 30 కి.మీ/గం॥ వేగంతో A వైపుకు బయలుదేరింది. A, B ల మధ్యదూరం 100 కి.మీలు అయితే ఆ రెండు కార్లు ఎంత సమయం తర్వాత కలుసుకుంటాయి ?

   పై సమస్యకు గణిత నమూనాను తయారుచేసి సాధించండి.

ఇప్పటి వరకు మనం సరళమైన రాత సమస్యలకు "గణిత నమూనాలు" తయారు చేశాము. ఇప్పుడు ఒక నిజజీవిత సమస్యను తీసుకొని దానికి గణిత నమూనాను ఎలా తయారుచేయాలో చూద్దాం!

ఉదాహరణ-3. 2000 సం॥లో ఐక్యరాజ్య సమితిలో సభ్యత్వం గల 191 దేశాలు, లింగ వివక్షతను తగ్గించడానికి ఒక ఒప్పందంను కుదుర్చుకున్నాయి. అందులో భాగంగా ప్రాథమిక, మాధ్యమిక పాఠశాలల్లోని బాలికల నిష్పత్తిని పెంచాలని లక్ష్యంగా నిర్ణయించుకున్నాయి. ఈ ఒప్పందంపై భారతదేశం కూడా సంతకం చేసింది. భారతదేశంలో వివిధ సం॥లలో ప్రాథమిక పాఠశాలల్లోని బాలికల నమోదు శాతం క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది.

పట్టిక A.I.1

సంవత్సరం	నమోదు(శాతంలో)
1991 – 92	41.9
1992 – 93	42.6
1993 – 94	42.7
1994 – 95	42.9
1995 – 96	43.1
1996 – 97	43.2
1997 -98	43.5
1998 – 99	43.5
1999 – 2000	43.6
2000 – 01	43.7
2001 - 02	44.1

పై సమాచారం ఆధారంగా ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదు స్థాయి ఏ రేటున పెరుగుతుందో తెల్పి, 50% నమోదును ఏ సం॥లో చేరుతామో అంచనా వేయండి.

సాధన :

సోపానం 1 : (సూత్రీకరణ) మొదట ఈ సమస్యను గణిత సమస్యరూపం లోకి మార్చుకోవాలి.

పట్టిక A1.1 మనకు 1991 – 92, 1992- 93 మొ॥లగు సం॥లలో ఉన్న నమోదు శాతాన్ని తెల్పుతుంది. దీనిలో మనం విద్యా సంవత్సరాలను 1991, 1992 గా తీసుకోవచ్చు. పట్టిక A1.1 లో సూచించిన విధంగా ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదు శాతం ఒకే రేటులో పెరగుతుందని అనుకుందాం. అపుడు మనకు ఏఏ సం॥ల మధ్య 50% నమోదు స్థాయిని చేరగలం అనడం కంటే ఎన్ని సం॥లలో అంత నమోదు స్థాయికి చేరగలం అనేది ముఖ్యం. (ఉదాహరణకు ₹ 15000 లను సం॥నకు 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున 3 సం॥లకు సాధారణ వడ్డీకి ఇస్తే. ఆ 3 సం॥లు 1999-2002 లేదా 2001-2004 అనేది అప్రస్తుతం. ఇక్కడ వడ్డీ రేటు; ఎన్ని సం॥లకు వడ్డీకి ఇస్తున్నాం అనేదే ముఖ్యము).

అదే విధంగా ఈ సమస్యలో కూడా 1991 తో పోల్చితే మిగిలిన సం॥లలో నమోదు స్థాయి ఎలా పెరిగిందని చూడాలి. దానికి మనం 1991 ను 0 సం॥గా మరియు 1992 ను 1గా సూచిద్దాం. ఎందుకంటే 1991 తర్వాత 1 సం॥ గడిచింది కాబట్టి. అదే విధంగా 1993 ని 3 గాను 1994 ను 4 చేత సూచిద్దాము. అప్పుడు పట్టిక ఇలా మారుతుంది.

పట్టిక A.I.2

సంవత్సరం	నమోదు(శాతంలో)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

ఒక్కొక్క సంవత్సరంలో నమోదు శాతం ఎంత పెరిగిందో క్రింది పట్టిక A.I.3లో ఇవ్వబడింది.

పట్టిక A.I.3

సంవత్సరం	నమోదు(శాతంలో)	పెరుగుదల
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 నుండి 1992 సం॥ల మధ్య మొదట సం॥ల కాలంలో నమోదు శాతం 41.9% నుండి 42.6% కు అంటే 0.7% పెరిగింది. 2వ సం॥ చివర 42.6% నుండి 42.7% కు అంటే 0.1% పెరిగింది. పై పట్టికను ఆధారంగా చేసుకొని సంవత్సరాలకు మరియు నమోదుశాతానికి ఒక ఖచ్చితమైన సంబంధాన్ని ఏర్పరచలేము. కాని పెరుగుదల అనేది ఒక్క మొదటి, చివరి సం॥లలో తప్ప మిగిలిన సం॥లలో స్థిరంగా ఉంది.

ఈ పెరుగుదల శాతాల యొక్క సరాసరి తీసుకుంటే

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22 \quad .... (1)$$

సరాసరి 0.22 కాబట్టి నమోదు శాతం స్థిరంగా 0.22% చొప్పున పెరుగుతుందని అనుకుందాం.

సోపానం 2 : (గణిత పరమైన వివరణ)

ప్రతీ సం॥ నమోదు శాతంలో స్థిరమైన పెరుగుదల 0.22% ఉందని అనుకున్నాం కాబట్టి

మొదటి సం॥ తర్వాత నమోదు శాతం $= 41.9 + 0.22$

రెండవ సం॥ తర్వాత ,, ,, $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

మూడవ సంవత్సరం ,, ,, $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

"n"వ సం॥ తర్వాత నమోదు శాతం $= 41.9 + 0.22n, \; n \geq 1.$ .... (2)

పై సమస్యలో మనం 50% నమోదు ఎన్ని సం॥లకు చేరుతుందో కన్గొనాలి. కాబట్టి మనం "n" విలువను క్రింది సూత్రం (నమూనా) ద్వారా రాబట్టవచ్చు.

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

సోపానం 3 : సాధన : "n" విలువ కోసం పై సమీ॥ను సాధించగా

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

సోపానం 4 : (వివరణ): సం॥ల సంఖ్య దశాంశ రూపంలో ఉండదు కాబట్టి 36.8 కి దగ్గరగా ఉన్న పూర్ణాంకం 37 ను సం॥ల సంఖ్యగా తీసుకుంటాం. అంటే నమోదు శాతం 50% ని చేరే సం॥ $1991 + 37 = 2028$.

సోపానం 5 : (విశ్వసనీయత): మనం నిజ జీవిత సమస్యను సాధిస్తున్నాం కాబట్టి మనకు వచ్చిన ఫలితం ఈ సమస్యకు ఎంతమేరకు సరిపోతుందో సరిచూసుకోవాలి.

సోపానం 2 లో వచ్చిన ఫలితం మనం వాస్తవం అని అనుకుందాము. సమస్యలో ఇచ్చిన విలువలతో; సోపానం 2 ఆధారంగా వచ్చిన విలువలను పోల్చుకొని చూద్దాం. ఈ విలువలు క్రింది పట్టిక A.I.4 లో ఇవ్వబడ్డాయి.

పట్టిక A.I.4

సంవత్సరం	నమోదు (శాతంలో)	సోపానం 2 ఆధారంగా వచ్చిన విలువలు(శాతంలో)	భేదం (శాతంలో)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

పై పట్టిక ఆధారంగా వాస్తవ విలువల కన్న; సోపానం 2 ఆధారంగా వచ్చిన విలువలు 0.3% లేదా 0.5% శాతం కంటె తక్కువగా ఉన్నట్లు మనం గమనించవచ్చు. ఈ తేడా వల్ల వచ్చే సమస్య ఏమిటంటే మనకు కావల్సిన సం॥ల సంఖ్యలో 3 నుండి 5 సం॥ల తేడా వస్తుంది. ఎందుకంటే వాస్తవ పెరుగుదల 1% నుండి 2%. మాత్రమే ఉంది. ఒకవేళ మనం ఇంత తేడాను అంగీకరిస్తే కనుక సోపానం 2 లో వచ్చినదే మనకు కావాల్సిన "గణిత నమూనా" అవుతుంది. అలా కాక ఈ తేడాను ఇంకా తగ్గించదలచుకుంటే ఈ నమూనాను మళ్ళీ మనం మెరుగుపరుచుకోవచ్చు. దానికోసం మళ్ళీ సోపానం 2కు వెళ్ళి సమీకరణాన్ని మార్చాల్సి ఉంటుంది.

అలా మర్చి చూద్దామా !

సోపానం 1 : (సమీకరణ పునరుత్పాదన) : మనం; నమోదు రేటు 0.22%, చొప్పున స్థిరంగా ఉందనుకొన్నప్పటికి ఈ దోషాన్ని సవరించుటకు ఒక స్థిరాంకాన్ని ప్రవేశపెడదాము. దాని కోసం పై పట్టికలో వచ్చి "భేదంల" యొక్క సరాసరిని తీసుకుందాము.

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

ఈ బేధాల యొక్క సరాసరి సహాయంతో మళ్ళీ మన సూత్రాన్ని సరిదిద్దుకోవచ్చు లేదా మెరుగుపరుచుకోవచ్చు.

వివరణ యొక్క పునఃసమీక్ష : సోపానం 2లో వచ్చిన విలువలన్నింటికి మనకు వచ్చిన సరాసరిని కలపడం వల్ల క్రింది సరైన సూత్రం లభిస్తుంది.

'n' వ సం॥లో నమోదు శాతం

$$= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n, \text{(ఇక్కడ } n \geq 1) \quad \ldots (3)$$

అపుడు, మొదట వచ్చిన సమీకరణం (2); ఇలా మారుతుంది.

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad \ldots (4)$$

సవరించిన సాధన :

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

వివరణ : n = 36 వచ్చింది కాబట్టి ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదుశాతం 50% కి; 1991 + 36 = 2027 లో చేరుతుంది.

సాధన యొక్క విశ్వసనీయత : మరొక్కసారి సమీకరణం (4) ద్వారా వచ్చిన విలువలతో వాస్తవ విలువలను పోల్చుకుంటే పట్టిక A.I.5 లోని విలువలు వస్తాయి.

పట్టిక A.I.5

సం॥	నమోదు (శాతం)	సమీకరణం(2)ద్వారా వచ్చినవిలువలు	భేదం	సమీకరణం(4) వచ్చిన విలువలు	భేదం
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	-0.18

పట్టికను జాగ్రత్తగా గమనిస్తే సమీకరణం (4) ద్వారా వచ్చిన విలువలు సమీకరణం (2) ద్వారా వచ్చిన విలువ కంటె కూడా వాస్తవ విలువలకు చాలా దగ్గరగా ఉన్నాయి. అంటే ఇక్కడ భేదాల సరాసరి "0"గా చెప్పవచ్చు.

A.I.4 గణిత నమూనా విధానం యొక్క ఉపయోగాలు

1. ఒక నిజ జీవిత సమస్యను గణిత సమస్యగా మార్చుకొని, దానిని సాధించి ముఖ్యమైన సమాచారంను రాబట్టడమే "గణిత నమూనా విధానం" యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యము. ప్రత్యక్ష పరిశీలన ద్వారా లేదా ప్రయోగాలు నిర్వహించి గాని; అత్యంత ఖర్చుతో కూడుకొని ఉన్న సందర్భంలో గాని సమాచార సేకరణ కష్టం అయినపుడు 'గణిత నమూనా విధానం" చాలా ఉపయోగకరము.

   ఉదా॥కు ఆగ్రాలో ఉన్న తాజ్‌మహల్ పైన "మథుర" నూనె శుద్ధి కర్మాగారం యొక్క కాలుష్య ప్రభావాన్ని తెలుసుకోవాలంటే తాజ్‌మహల్ పైన ప్రత్యక్షంగా ప్రయోగాలు చేయలేము. ఎందుకంటే దాని వల్ల ఒక అద్భుతమైన కట్టడానికి ప్రమాదం వాటిల్లే అవకాశం ఉంది. ఇలాంటి సందర్భంలో గణిత నమూనా విధానంను ఉపయోగించుకోవచ్చు.

2. అనేక రకాల సంస్థలు గాని వ్యవస్థలు గాని ముందస్తు ప్రణాళికతో పని చేస్తాయి. ఎందుకంటే కీలక నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలో భవిష్యత్ ప్రణాళిక ఇమిడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు

(i) మార్కెటింగ్ రంగంలో ఏఏ వస్తువులకు ఎక్కువ డిమాండ్ ఉంటుందో ప్రణాళిక సిద్ధం చేసుకొని అమ్మకాలు పెంచుకుంటారు.

(ii) పాఠశాలల్లో విద్యార్థుల నమోదు శాతాన్ని పెంచడానికి ఏఏ ఆవాస ప్రాంతాలలో బడి ఈడు పిల్లలు ఉన్నారో ముందుగానే ప్రణాళిక సిద్ధం చేసుకొని ఆయా ప్రాంతాల్లో నూతన పాఠశాలలు ప్రారంభించాలని విద్యాశాఖ నిర్ణయించుకుంటుంది.

3. అడవిలో ఉన్న చెట్ల సంఖ్య; సరస్సులోని చేపల సంఖ్య; ఓటింగ్‌లో పోలయిన ఓట్లు చెప్పడం లాంటి అనేక సందర్భాలలో మనం "అంచనా వేయడం" అనే ప్రక్రియను ఉపయోగిస్తుంటాము.

   "గణిత నమూనా విధానం" ను ఉపయోగించే మరికొన్ని సందర్భాలను గమనిద్దాము.

   (i) రాబోయే కొన్ని సం॥ల తర్వాత ఉండే భవిష్యత్ జనాభా

   (ii) రాబోయే కొన్ని రోజుల్లో ఉండే వాతావరణం వివరాలు

   (iii) రాబోయే కొన్ని సం॥లలో ఉండే అక్షరాస్యత శాతం

   (iv) ఒక చెట్టుకు ఉండే ఆకుల సంఖ్యను ఊహించగల్గడం

   (v) మహాసముద్రాల లోతును లెక్కించడం

A.I.5 గణిత నమూనా విధానం యొక్క పరిమితులు

అన్ని సమస్యలకు పరిష్కారాన్ని "గణిత నమూనా విధానం" చూపుతుందా?

ఖచ్చితంగా చూపదనే చెప్పవచ్చు. ఎందుకంటే దీనికి కూడ కొన్ని పరిమితులు ఉంటాయి. కాబట్టి దీనిని నిజ జీవిత సమస్యకు కేవలం ఒక సూక్ష్మరూపంగానే మనం గ్రహించాలి. ఒక దేశానికి సంబంధించిన పటం, అసలైన దేశంకు మధ్య భేదం ఎలా ఉంటుందో ఇది కూడా అలాగే ఉంటుంది. పటం సహాయంతో ఒక ప్రదేశం; సముద్ర మట్టం నుండి ఎంత ఎత్తులో ఉందో కనుగొనవచ్చు కాని అక్కడి ప్రజల జీవన విధానాన్ని గాని వారి లక్షణాలను గాని చెప్పలేము. ఎక్కడ అత్యవసరమో అక్కడ మాత్రమే "గణిత నమూనా ప్రక్రియ"ను ఉపయోగించగలం. గత ఉదాహరణ సమస్యలలో సాధనను కనుగొనే సందర్భంలో వడ్డీరేటు మారదని; వాషింగ్‌మెషిన్ ధర అలాగే ఉంటుందనే కొన్ని ఊహనలు చేసుకున్నాం గుర్తుందా? అంటే దీనిని బట్టి గణిత నమూనా విధానంకు కూడా పరిమితులు ఉంటాయని తెలుసుకోవచ్చు.

A.I.6 ఒక నమూనాను ఎంత మేరకు మెరుగుపరచగలం ?

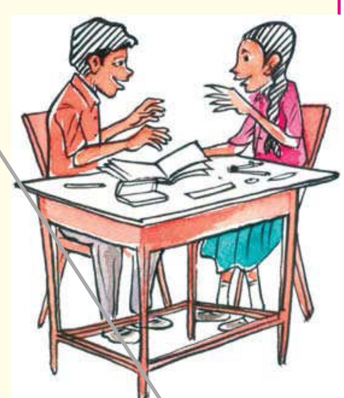
ఒక గణిత నమూనాను మెరుగుపరచడంలో చాలా అంశాలను పరిగణలోనికి తీసుకోవాల్సి ఉంటుంది. ఇలా చేయడం వల్ల మన గణిత సమీకరణంలో ఇంకా కొన్ని చరరాశులు పెరిగే అవకాశం ఉంది. దాని వల్ల నమూనా క్లిష్టంగా మారి ఉపయోగించడానికి వీలు లేకుండా పోతుంది. కాబట్టి ఎప్పుడైనా ఒక గణిత నమూనా అనేది సరళంగా ఉండి ఖచ్చితంగా ఉపయోగించే విధంగా ఉండాలి. అంటే మంచి నమూనా అనేది ఎప్పుడూ కూడా వాస్తవానికి దగ్గరగా ఉండాలి.

ప్రయత్నించండి

క్రీ.శ 13వ శతాబ్దంలో లియోనార్డో ఫిబోనాకి సంబంధించిన సమస్య ఇది. ఒక సం॥కాలంలో ఉత్పత్తి చేసే కుందేళ్ళ సంఖ్యకు సంబంధించింది. ఒక కుందేళ్ళ జత ప్రతినెల చివర మరొక కుందేళ్ళ జతకు జన్మనిచ్చి, మరల ఈ జత మరొ 2 నెలల్లో మరొక జతకు జన్మనిస్తాయని అనుకుందాం. నెలనెలా ఈ జతల సంఖ్య అనేది మొదటి 2 నెలలు తప్ప మిగిలిన నెలల్లో వాటి ముందు 2 నెలల్లోని కుందేళ్ళ జత సంఖ్యకు సమానం.

కుందేళ్ళ సంఖ్య ఏవిధంగా పెరుగుతుందో క్రింది పట్టికలో చూపబడింది.

నెల	కుందేళ్ళ జతల సంఖ్య
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597



ఒక సం॥కాల తర్వాత 233 జతల కుందేళ్ళు ఉంటాయి. 16 నెలల తర్వాత 1597 జతల కుందేళ్ళ ఉత్పత్తి అవుతాయి.

పై సమస్యకు "గణిత నమూనా విధానం"ను ఉపయోగించి సమస్యలోని వివిధ దశలను తెల్పండి.

ఇప్పుడు "గణిత నమూనా విధానం"ను ఉపయోగించి సాధించగల్గే మరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-4. (పాచికలను విసరడం) : దీక్షిత మరియు ఆశిష్ ఇద్దరు కలిసి రెండు పాచికలతో ఆడుకుంటున్నారు. అప్పుడు ఆశిష్; రెండు పాచికలు విసిరిన తర్వాత వాటి ముఖాలపై ఉండె అంకెల మొత్తం ముందుగానే ఊహించి సరైన సమాధానం చెబితే దీక్షితకు మంచి బహుమతిఇస్తానని చెప్పాడు. అంకెల మొత్తం ఎంత చెబితే దీక్షిత బహుమతి గెలిచే అవకాశం ఎక్కువగా ఉంటుంది.

సాధన :

సోపానం 1 (సమస్య అవగాహన) : ఈ సమస్యలో ముందుగా 2 పాచికలను విసిరితే వాటి ముఖాలపై ఏఏ అంకెలు ఎక్కువగా పడతాయో తెలుసుకోవాల్సి ఉంటుంది.

సోపానం 2 (గణిత పరమైన వివరణ) : పాచికలపై ఏఏ సంఖ్య గల ముఖాలు పడే అవకాశం ఉంటుందో, వాటి సంభావ్యతలు ఎలా ఉంటాయో పరిశీలించాలి.

రెండు పాచికలను విసిరితే వాటి ముఖాలపై ఏఏ అంకెలు ఉండవచ్చో ముందుగానే ఊహించడం ద్వారా ఈ సమస్యకు నమూనాను సులభంగా రాసుకోవచ్చు. 2 పాచికలను ఒకేసారి విసరడం ద్వారా మనకు 36 జతలు ఏర్పడుతాయి.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

పై జతలలో మొదటి అంకె 1వ పాచిక ముఖంపై కన్పించే అంకెను, రెండవ అంకె 2వ పాచిక ముఖంపై కన్పించే అంకెను సూచిస్తుంది.

సోపానం 3 (సమస్యా సాధన) : పై జతలలోని అంకెలను కూడడం ద్వారా అంకెల మొత్తం మనకు 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 మరియు 12 వచ్చే అవకాశం ఉంది. ఈ 36 జతలలో ఏ మొత్తం పడే సంభావ్యత ఎంతో తెలుసుకోవాలి.

ఈ సంభావ్యతలను క్రింది పట్టికలో చూపుదాము.

మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

పట్టికను నిశితంగా గమనించడం ద్వారా అంకెల మొత్తం 7 వచ్చే సంభావ్యత $\frac{1}{6}$ అని, ఇది మిగిలిన సంభావ్యతల కంటె ఎక్కువ అని చెప్పవచ్చు.

సోపానం 4 (సాధనకు వివరణ) : అంకెల మొత్తం 7 వచ్చే సంభావ్యత ఎక్కువ కాబట్టి, అంకెల మొత్తం 7 అని ఎక్కువ సార్లు చెప్పడం ద్వారా దీక్షిత బహుమతి గెలిచే అవకాశం ఎక్కువ ఉంటుంది.

సోపానం 5 (విశ్వసనీయత) : రెండు పాచికలను తీసుకొని ఎక్కువ సార్లు విసిరి ఒక పరస్పర పౌనఃపున్య పట్టిక తయారు చేయాలి. ఇప్పుడు పరస్పర పౌనఃపున్యాలను వాటి సంభావ్యతలతో పోల్చి చూడాలి. ఒకవేళ ఇవి ఏకీభవించకపోతే పాచికలు నిష్పాక్షికంగా ఉన్నాయని అంటాము.

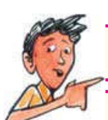
"ప్రయత్నించండి"లోని సమస్యను సాధించడానికి మనం ముందుగా తెలుసుకోవాల్సిన విషయాలు ఏమిటో చూద్దాం.

ఈ రోజుల్లో డబ్బు లేకుండా ఏ పని చేయలేము అనేది వాస్తవం మరియు ప్రతీ మనిషికి ఎదురయ్యే అనుభవమే. నిజజీవిత అవసరాలను తీర్చుకోవడానికి; సుఖమయ జీవితం గడపడానికి డబ్బు అవసరము. పరిమిత ఆదాయం గల కొనుగోలుదారులను ఆకర్షించడానికి అమ్మకందారులు అనుసరించే మార్గమే "వాయిదా పద్ధతి"

పండుగల సమయంలో అమ్మకందారులు ఎక్కువగా అమ్మకాలను పెంచుకోవడానికి ఈ పద్ధతిని ప్రవేశపెడతారు. ఈ వాయిదా పద్ధతిలో కొనుగోలుదారుడు వస్తువు యొక్క వాస్తవ రేటు కన్న ఎక్కువ ధరను చెల్లిస్తాడు. ఎందుకంటే వస్తువు కొనుగోలు సమయంలో దాని ధరలో కొంత మొత్తాన్ని చెల్లించి, మిగిలిన డబ్బును వాయిదాల రూపంలో చెల్లిస్తాడు. తర్వాత కాలంలో చెల్లించే ఈ డబ్బుపైన కొంత వడ్డీని అమ్మకందారుడు విధిస్తాడు.

మనం ఈ అధ్యాయానికి సంబంధించిన కొన్ని పదాలు తరచుగా వింటుంటాము. ఉదా॥కు వినియోగదారుడు చెల్లించే వాస్తవరేటును అమ్మకం వెల అని, వాయిదాల పద్ధతిలో కొన్నట్లయితే ప్రారంభంలో చెల్లించే ధరను "ప్రారంభ చెల్లింపు" (క్యాష్‌డౌన్ పేమెంట్) అని అంటాము.

ఇప్పుడు క్రింది "ప్రయత్నించండి" లోని సమస్యను గణిత నమూనా ప్రక్రియను ఉపయోగించి సాధించండి.



ప్రయత్నించండి

రవి తన అవసరాల నిమిత్తం ఒక సైకిల్ కొనాలని అనుకున్నాడు. మార్కెట్‌లో తనకు నచ్చిన సైకిల్ ధర ₹ 2400 గా ఉంది. కాని రవి వద్ద కేవలం ₹ 1400 మాత్రమే ఉన్నాయి. అప్పుడు షాపు యజమాని రవికి సహాయం చేయదలచి, ప్రస్తుతం ₹ 1400 చెల్లించి మిగిలిన మొత్తాన్ని నెలకు ₹ 550 చొప్పున సమాన నెలసరి వాయిదా చెల్లించమని చెప్పాడు. అయితే రవి మాత్రం ₹ 1,000 లను బ్యాంకులో సం॥నికి 12% చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి అప్పుగా తీసుకుందాం అనుకున్నాడు. ఈ రెండు అవకాశాలలో ఏది లాభదాయ మైనదో సూచించి రవికి సహాయపడండి.

జవాబులు

అభ్యాసము - 1.1

1. (i) అంతమయ్యే దశాంశం (ii) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం
(iii) అంతమయ్యే దశాంశం (iv) అంతమయ్యే దశాంశం
(v) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం

2. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $3\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{31}{25}$

3. (i) అకరణీయం (ii) కరణీయం (iii) అకరణీయం (iv) అకరణీయం
(v) అకరణీయం (vi) కరణీయం (vii) అకరణీయం

అభ్యాసము- 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) క.సా.గు = 420, గ.సా.కా = 3 (ii) క.సా.గు = 11339, గ.సా.కా = 1
(iii) క.సా.గు = 1800, గ.సా.కా = 1 (iv) క.సా.గు = 216, గ.సా.కా = 36
(v) క.సా.గు = 22338, గ.సా.కా = 9

అభ్యాసము - 1.3

1. (i) 0.375 (అంతమయ్యే దశాంశం) (ii) 0.5725 (అంతమయ్యే దశాంశం)
(iii) 4.2 (అంతమయ్యే దశాంశం)
(iv) $0.\overline{18}$ (అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం) (v) 0.064 (అంతమయ్యే దశాంశం)

2. (i) అంతమయ్యే దశాంశం (ii) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం
(iii) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం (iv) అంతమయ్యే దశాంశం
(v) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం (vi) అంతమయ్యే దశాంశం
(vii) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం (viii) అంతమయ్యే దశాంశం
(ix) అంతమయ్యే దశాంశం (x) అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశం

3. (i) 0.52 (ii) 0.9375 (iii) 0.115 (iv) 32.08 (v) 1.3

4. (i) అకరణీయం (ii) అకరణీయంకాదు (iii) అకరణీయం

5. m = 5, n = 3

6. m = 4, n = 2

అభ్యాసము - 1.5

1. (i) $\log_3 243 = 5$ (ii) $\log_2 1024 = 10$ (iii) $\log_{10} 1000000 = 6$

   (iv) $\log_{10} 0.001 = -3$ (v) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (vi) $\log_6 1 = 0$

   (vii) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$ (viii) $\log_{\sqrt{49}} 7 = 1$ (ix) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

   (x) $\log_{32} \frac{1}{4} = -\frac{2}{5}$

2. (i) $18^2 = 324$ (ii) $10^4 = 10000$ (iii) $a^b = \sqrt{x}$

   iv) $4x = 8$ (v) $3y = \frac{1}{27}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) -4 (iv) 0

   (v) $\frac{1}{2}$ (vi) 9 (vii) -2 (viii) 3

4. (i) log 10 (ii) log 8 (iii) log 64

   (iv) $\log \frac{9}{8}$ (v) log 243 (vi) log 45

5. (i) $3(\log 2 + \log 5)$ (ii) $7\log 2 - 4\log 5$ (iii) $2\log x + 3\log y + 4\log z$

   (iv) $2\log p + 3\log q - \log r$ (v) $\frac{1}{2}(3\log x - 2\log y)$

అభ్యాసము - 2.1

1. (i) సమితి (ii) సమితికాదు (iii) సమితికాదు

   (iv) సమితి (v) సమితి

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\notin$

   (v) $\in$ (vi) $\in$

3. (i) $x \notin A$ (ii) B = {d} (iii) $1 \in N$ (iv) $8 \notin P$

4. (i) అసత్యము (ii) అసత్యము
   (iii) సత్యము (iv) అసత్యము

5. (i) B = {1, 2, 3, 4, 5}
   (ii) C = {17, 26, 35, 44, 53, 62, 71}
   (iii) D = {5, 3}
   (iv) E = {B, E, T, R}

6. (i) A = {x : x అనేది 3 యొక్క గుణిజం మరియు $x < 13$}
   (ii) B = {x : $x = 2^x$ x కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య 6}
   (iii) C = {x : x = 5, x అనేది 5 కంటే తక్కువైన సహజసంఖ్య}
   (iv) D = {x : x అనేది ఒక వర్గ సంఖ్య మరియు $x \leq 10$}

7. (i) A = {51, 52, 53, ..., 98, 99}
   (ii) B = {+2, – 2}
   (iii) D = {2, 0, 4, A, 2}

8. (i) (c)
   (ii) (a)
   (iii) (d)
   (iv) (b)

అభ్యాసము - 2.2

1. (i) శూన్యసమితికాదు (ii) శూన్యసమితి (iii) శూన్యసమితి
   (iv) శూన్యసమితి (v) శూన్యసమితికాదు

2. (i) పరిమితసమితి (ii) పరిమితసమితి (iii) పరిమితసమితి

3. (i) పరిమితసమితి (ii) అపరిమితసమితి (iii) అపరిమితసమితి
   (iv) అపరిమితసమితి

అభ్యాసము - 2.3

1. (i) సమసమితి అవుతుంది (ii) సమసమితి కాదు (iii) సమసమితి కాదు

2. (i) సమసమితి (ii) సమసమితి కాదు (iii) సమసమితి
   (iv) సమసమితి కాదు (v) సమసమితి కాదు (vi) సమసమితి కాదు
   (vii) సమసమితి కాదు

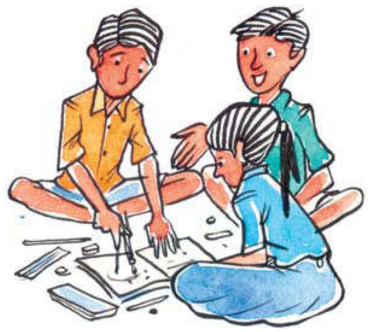
3. (i) A = B (ii) $A \neq B$ (iii) A = B (iv) $A \neq B$

అభ్యాసము - 2.4

1. (i) సత్యము (ii) సత్యము (iii) సత్యము (iv) సత్యము
2. (i) $\{1, 2, 3, ... 10\} \neq \{2, 3, 4, ... 9\}$.
   (ii) మొదటి సమితి సరి సంఖ్యలను సూచించగా, రెండవ సమితి ఆ బేసిసంఖ్యలను సూచిస్తుంది.
   (iii) మొదటి సమితిలోని '5' అనే మూలకం 15 యొక్క గుణిజం రాదు.
   (iv) మొదటి సమితిలోని 9 ప్రధానసంఖ్య కాదు.
3. (i) $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \phi$
   (ii) $\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{x, y, z\}, \phi$
   (iii) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d)$
   (iv) $\phi, \{1\}, \{4\}, \{9\}, \{16\}, \{1, 4\}, \{1, 9\}, \{1, 16\}, \{4, 9\}, \{4, 16\}, \{9, 16\}$, $\{1, 4, 9\}, \{4, 9, 16\}, \{1, 4, 16\}, \{1, 4, 9, 16\}$
   (v) $\phi, \{10\}, \{100\}, \{1000\}, \{100, 1000\}, \{10, 100, 1000\}$

అభ్యాసము - 2.5

1. అవును, $A \cap B = B \cap B = \{1, 2, 3\}$
2. $A \cap \phi = \phi$;
   $A \cap A = A$
3. $A - B = \{2, 4, 8, 10\}$
   $B - A = \{3, 9, 12, 15\}$
4. $A \cup B = B$
5. $A \cap B = \{$సరి సహజ సంఖ్య$\}$
   $\{1, 3, 5, ...\}$
   $A \cap C = C = \{$బేసి సహజ సంఖ్య$\}$
   $A \cap D = D = \{$ప్రధాన సంఖ్య$\}$
   $B \cap C = \phi$;
   $B \cap D = \{$సరి ప్రధాన సంఖ్య$\} = \{2\}$
   $C \cap D = \{4, 6, 8, 9, ... 99\} = \{$బేసి ప్రధాన సంఖ్యలు$\}$
6. (i) $A - B = \{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$
   (ii) $A - C = \{3, 9, 15, 18, 21\}$
   (iii) $A - D = \{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$



(iv) B – A = {4, 8, 16, 20}

(v) C – A = {2, 4, 8, 10, 14, 16}

(vi) D – A = {5, 10, 20}

(vii) B – C = {20}

(viii) B – D = {4, 8, 12, 16}

(ix) C – B = {2, 6, 10, 14)

(x) D – B = {5, 10, 15}

7. (i) అసత్యము, ఎందుకంటే ఉమ్మడి మూలకం '3'కలదు

(ii) సత్యము; ఎందుకంటే రెండు సమితులకు ఉమ్మడి మూలకాలు లేవు.

(iii) సత్యము; ఎందుకంటే రెండు సమితులకు ఉమ్మడి మూలకాలు లేవు.

(iv) సత్యము; ఎందుకంటే రెండు సమితులకు ఉమ్మడి మూలకాలు లేవు.

అభ్యాసము- 3.1

1. (a) (i) -6 (ii) 7 (iii) -6

2. (i) అసత్యము, ఎందుకనగా $\sqrt{2}$ అనేది x^2 గుణకం కాని పరిమాణం కాదు.

(ii) అసత్యము, ఎందుకనగా x^2 యొక్క గుణకం -4.

(iii) సత్యము, ఎందుకనగా ఏ స్థిర సంఖ్య యొక్క పరిమాణమైనా సున్నా అవుతుంది.

(iv) అసత్యము, ఎందుకనగా ఇది బహుపదికాదు.

(v) అసత్యము ఎందుకనగా బహుపది యొక్క పరిమాణానికి మరియు దానిలోని పదాల సంఖ్యకు సంబంధం లేదు.

3. $p(1) = 0, p(-1) = -2, p(0) = -1, p(2) = 7, p(-2) = -9$

4. -2 మరియు 2 అనేవి x^4-16 యొక్క శూన్యవిలువలు అవుతాయి.

5. 3 మరియు -2 అనేవి $p(x) = x^2 - x - 6$ యొక్క శూన్యవిలువలు అవుతాయి

అభ్యాసము - 3.2

1. (i) శూన్యవిలువలులేవు (ii) 1 (iii) 3

(iv) 2 (v) 4 (vi) 3

2. (i) 0 (ii) $-2, -3$ (iii) $-2, -3$ (iv) $-2, 2, \pm\sqrt{-4}$

3. (i) $4, -3$ (ii) 3, 3 (iii) శూన్యవిలువలులేవు

(iv) $-4, 1$ (v) $-1, 1$

4. $p\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ మరియు $p(-1) = 0$

అభ్యాసము - 3.3

1. (i) $4, -2$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$

   (iv) $0, -2$ (v) $\sqrt{15}\ -\sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

   (iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

3. (i) $x^2 - x - 2$ (ii) $x^2 - 3$ (iii) $4x^2 + 3x - 1$

   (iv) $4x^2 - 8x + 3$

4. $-1, -1$ మరియు 3లు ఇచ్చిన బహుపదికి శూన్యాలు

అభ్యాసము - 3.4

1. (i) భాగఫలం $= x - 3$ మరియు శేషం $= 7x - 9$

   (ii) భాగఫలం $= x^2 + x - 3$ మరియు శేషం $= 8$

   (iii) భాగఫలం $= -x^2 - 2$ మరియు శేషం $= -5x + 10$

2. (i) అవును (ii) అవును (iii) కాదు

3. $-1, -1$

4. $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14,\ g(x) = 2,\ q(x) = x^2 - x + 7,\ r(x) = 0$

   (ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ g(x) = x^2 - 1,\ q(x) = x + 1,\ r(x) = 2x + 2$

   (iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2,\ g(x) = x^2 - 1,\ q(x) = x + 2,\ r(x) = 4$

అభ్యాసము- 4.1

1. (a) ఖండన రేఖలు

   (b) రెండు రేఖలు ఏకీభవిస్తాయి

   (c) సమాంతర రేఖలు

2. (a) సంగత సమీకరణాలు (b) అసంగత సమీకరణాలు

   (c) సంగత సమీకరణాలు (d) సంగత సమీకరణాలు

   (e) సంగత సమీకరణాలు (f) అసంగత సమీకరణాలు

(g) అసంగత సమీకరణాలు (h) సంగత సమీకరణాలు

(i) అసంగత సమీకరణాలు

3. ప్యాంట్ల సంఖ్య = 1; షర్టుల సంఖ్య = 0

4. బాలికల సంఖ్య = 7; బాలుర సంఖ్య = 4

5. పెన్సిల్ ధర = 23; పెన్ను ధర = 25

6. పొడవు = 20 మీ; వెడల్పు = 16 మీ

7. (i) $3x + 2y - 7 = 0$

(ii) $3x + 3y - 12 = 0$

(iii) $4x + 6y - 16 = 0$

8. పొడవు = 56 యూనిట్లు; వెడల్పు = 100 యూనిట్లు

9. విద్యార్థుల సంఖ్య = 16; బెంచీల సంఖ్య = 5

అభ్యాసము - 4.2

1. మొదటి వ్యక్తి యొక్క ఆదాయం = ₹ 18000; రెండవ వ్యక్తి యొక్క ఆదాయం = ₹ 14000
2. 42 మరియు 24
3. కోణాలు : 54^{o} మరియు 36^{o}
4. స్థిర ఖర్చు = ₹ 40; ఒక కి.మీ. చార్జీ = ₹ 18 (ii) ₹ 490
5. $\frac{7}{9}$
6. 60 కి.మీ/గం; 40కి.మీ/గం.
7. 61^{o} మరియు 119^{o}
8. 659 మరియు 723
9. 40 మీ.లీ మరియు 60 మీ.లీ
10. ₹ 7200 మరియు ₹ 4800

అభ్యాసము - 4.3

1. (i) (4, 5) (ii) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (iii) (4, 9)

(iv) (1, 2) (v) (3, 2) (vi) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

(vii) (3, 2) (viii) (1, 1)

2. (i) పడవవేగం = 8 కి.మి/గం; ప్రవాహ వేగం = 3 కి.మి/గం;
   (ii) రైలు వేగం = 60 కి.మి/గం;కారు వేగం = 80 కి.మి/గం;
   (iii) పురుష, పనిపూర్తి చేయుటకు పట్టు రోజులు = 18;
   పని పూర్తి చేయడానికి స్త్రీలకు పట్టే రోజుల సంఖ్య = 36

అభ్యాసము - 5.1

1. (i) అవును (ii) అవును (iii) కాదు
   (iv) అవును (v) అవును (vi) కాదు
   (vii) కాదు (viii) అవును
2. (i) $2x^2 + x - 528 = 8$ (x = వెడల్పు)
   (ii) $x^2 + x - 306 = 0$ (x = చిన్న పూర్ణ సంఖ్య)
   (iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$ (x = రోహన్ యొక్క వయస్సు)
   (iv) $x^2 - 8x + 1280 = 0$ (x = రైలు యొక్క వేగం)

అభ్యాసము - 5.2

1. (i) $-2; 5$ (ii) $-2; \frac{3}{2}$ (iii) $-\sqrt{2}; \frac{-5}{\sqrt{2}}$
   (iv) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}; \frac{1}{10}$ (vi) $-6; 2$
   (vii) $1, \frac{2}{3}$ (viii) $-1; 3$ (ix) $7, \frac{8}{3}$
2. 13, 14
3. 17, 18; –17, –18
4. 5 సెం.మీ, 12 సెం.మీ,
5. వస్తువుల సంఖ్య = 6; వస్తువు ఖరీదు = 15
6. 4 మీ; 10 మీ
7. Base = 12 సెం.మీ; ఎత్తు = 8 సెం.మీ
8. 15 కి.మీ, 20 కి.మీ
9. 20 లేదా 40
10. 9 కి.మీ/గంట

అభ్యాసము- 5.3

1. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$, $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

   (iii) $\frac{7+\sqrt{-71}}{10}$, $\frac{7-\sqrt{71}}{10}$ (iv) -1, -5

3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2

4. 7 సం॥

5. గణితం = 12, ఇంగ్లీషు = 18 (లేదా) లెక్కలు = 13, ఇంగ్లీషు = 17

6. 120 మీ; 90 మీ.

7. 18, 12; -18, -12

8. 40 కి.మీ/గం.

9. 15 గం॥, 25 గం॥

10. ప్యాసింజర్ రైలు వేగం = 33 కి.మీ/గం

    ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు వేగం = 44 కి.మీ/గం

11. 18 మీ; 12 మీ

12. 6 సెకండ్లు

13. 13 భుజాలు; కాదు

అభ్యాసము- 5.4

1. (i) వాస్తవ మూలాలు లేవు

   (ii) సమాన మూలాలు; $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$

   (iii) విభిన్న మూలాలు; $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k=\pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k=6$

3. అవును; 40 మీ; 20 మీ

4. కాదు

5. అవును; 20 మీ; 20 మీ

8. $\frac{3}{7}$

అభ్యాసము - 6.1

1. (i) అంకశ్రేఢి అవుతుంది. (ii) అంకశ్రేఢి కాదు (iii) అంకశ్రేఢి అవుతుంది
   (iv) అంకశ్రేఢి కాదు
2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) $-2, -2, -2, -2$
   (iii) $4, 1, -2, -5$ (iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$
   (v) $-1.25, -1.5, -1.75, -2$
3. (i) $a_1 = 3; \quad d = -2$ (ii) $a_1 = -5; \quad d = 4$
   (iii) $a_1 = \frac{1}{3}; \quad d = \frac{4}{3}$ (iv) $a_1 = 0.6; \quad d = 1.1$
4. (i) అంకశ్రేఢి కాదు
   (ii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= 4, \frac{9}{2}, 5$
   (iii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= -9.2, \ -11.2, \ -13.2$
   (iv) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= 6, 10, 14$
   (v) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= 3 + 4\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2}, 3 + 6\sqrt{2}$
   (vi) అంకశ్రేఢి కాదు
   (vii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= -16, -20, -24$
   (viii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$
   (ix) అంకశ్రేఢి కాదు
   (x) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= 5a, 6a, 7a$
   (xi) అంకశ్రేఢి కాదు
   (xii) అంకశ్రేఢి (AP), తరువాత మూడు పదాలు $= \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$
   (xiii) అంకశ్రేఢి కాదు

అభ్యాసము- 6.2

1. (i) $a_8 = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$
   (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$
2. (i) -84 (ii) 22

3. (i) $a_2 = 14$
(ii) $a_1 = 18$; $a_3 = 8$
(iii) $a_2 = \frac{13}{2}$; $a_3 = 8$
(iv) $a_2 = -2$; $a_3 = 0$; $a_4 = 2$; $a_5 = 4$
(v) $a_1 = 53$; $a_3 = 23$; $a_4 = 8$; $a_5 = -7$

4. 16వ పదము

5. (i) 34 (ii) 27

6. కాదు 7. 178 8. 5 9. 1

10. 100 11. 128 12. 60 13. 13

14. అంకశ్రేఢి = 4, 10, 16, ... 15. 158

16. $-13, -8, -3$ 17. 11 18. 13

అభ్యాసము - 6.3

1. (i) 245 (ii) -180 (iii) 555 (iv) $\frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$

2. (i) $\frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) -8930

3. (i) 440 (ii) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$
(iii) $a = 4$, $S_{12} = 246$ (iv) $d = 1$, $a_{10} = 22$
(v) $x = 5$; $a_5 = 37$ (vi) $x = 7$; $a = -8$
(vii) $a = 4$

4. $x = 38$; $S_{38} = 6973$

5. 5610

6. x^2

7. (i) 525 (ii) -465

8. $S_1 = 3$; $S_2 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = -1$; $a_{10} = -15$
$a_n = 5 - 2x$

9. 4920 10. 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40

11. 234 12. 143 13. 16 14. 370

అభ్యాసము - 6.4

1. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును

2. (i) 4, 12, 36, ... (ii) $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{25}, \ldots$

(iii) 81, – 27, 9, ... (iv) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots$

3. (i) అవుతుంది; 32, 64, 128 (ii) అవుతుంది; $\frac{-1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{-1}{96}$

(iii) కాదు (iv) కాదు (v) కాదు

(vi) అవుతుంది; $-81, 243, -729$ (vii) అవుతుంది; $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \ldots\ldots$

(viii) అవుతుంది; $-16,\ 32\sqrt{2},\ -128$ (ix) అవుతుంది; 0.0004, 0.00004, 0.000004

4. -4

అభ్యాసము - 6.5

1. (i) $r_a = \frac{1}{2}$; $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(ii) $r = -3$; $a_n = 2(-3)^{n-1}$

(iii) $r = 3$; $a_n = 3(3)^{n-1}$

(iv) $r = \frac{2}{5}$; $a_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

2. $a_{10} = 5^{10}$; $a_n = 5^n$

3. (i) $\frac{1}{3^4}$ (ii) $\frac{-4}{3^4}$

4. (i) 5 (ii) 12 (iii) 7

5. 2^{12} 6. $\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \ldots$ 7. 5

అభ్యాసము - 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{2}$ (iv) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39

3. సరేఖీయాలు కాదు

9.	(i) చతురస్రం	(ii)	ట్రెపీజియం	(iii)	సమాంతర చతుర్భుజం
10.	(7, 0)	11.	7 or – 5		
12.	3 or – 9	13.	$2\sqrt{5}$ యూనిట్లు		

అభ్యాసము - 7.2

1. (1, 3)
2. $\left(2, \frac{-5}{3}\right)$ మరియు $\left(0, \frac{-7}{3}\right)$
3. 2 : 7
4. $x = 6$; $y = 3$
5. (3, – 10)
6. $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$
7. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2, 3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$
8. $\left(1, \frac{13}{2}\right)$
9. 24 చ.యూనిట్లు
10. $\left(\frac{5a-b}{5}, \frac{5a+b}{5}\right)$
11. (i) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ (ii) $\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ (iii) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

అభ్యాసము - 7.3

1. (i) $2\frac{1}{2}$ చ.యూనిట్లు (ii) 32 చ.యూనిట్లు (iii) 3 చ.యూనిట్లు
2. (i) K = 4 (ii) K = 3 (iii) $K = \frac{7}{3}$
3. 1 చ.యూనిట్లు; 1 : 4
4. $\frac{33}{2}$ చ.యూనిట్లు;
5. $1500\sqrt{3}$ చ.యూనిట్లు;

అభ్యాసము - 7.4

1. (i) 6 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\frac{4b}{a}$ (iv) $\frac{-a}{b}$
   (v) $\frac{-25}{19}$ (vi) 0 (vii) $\frac{1}{7}$ (viii) –1

అభ్యాసము - 8.1

4. $x = 5$ సెం.మీ. మరియు $y = 2\frac{13}{16}$ సెం.మీ. లేదా 2.8125 సెం.మీ.

అభ్యాసము - 8.2

1. (ii) DE = 2.8 సెం.మీ.

2. 8 సెం.మీ. 3. 1.6 మీ. 7. 16 మీ.

అభ్యాసము - 8.3

3. 1:4 4. $\frac{\sqrt{2}-1}{1}$ 6. 96 చ.సెం.మీ. 8. 3.5 సెం.మీ.

అభ్యాసము - 8.4

8. $6\sqrt{7}$ మీ. 9. 13 మీ. 12. 1:2

అభ్యాసము - 9.1

1. (i) ఒకటి (ii) ఛేదనరేఖ (iii) రెండు

(iv) స్పర్శబిందువు (v) అనంత

2. PQ = 13 సెం.మీ. 4. $\sqrt{306}$ సెం.మీ.

అభ్యాసము - 9.2

1. (i) d (ii) a (iii) b (iv) a (v) c

2. 8 సెం.మీ. 4. AB = 15 సెం.మీ., AC = 13 సెం.మీ.

5. 8 సెం.మీ. 6. $2\sqrt{5}$ సెం.మీ. 9. రెండు

అభ్యాసము - 9.3

1. (i) 28.5 చ.సెం.మీ. (ii) 285.5 చ.సెం.మీ.

2. 88.368 చ.సెం.మీ. 3. 1254.96 చ.సెం.మీ. 4. 57 చ.సెం.మీ.

5. 10.5 చ.సెం.మీ. 6. 9.625 చ.సెం.మీ. 7. 102.67 చ.సెం.మీ.

8. 57 చ.సెం.మీ.

అభ్యాసము - 10.1

1. 5500 చ.సెం.మీ. 2. 124800చ.సెం.మీ. (12.48 చ.మీ.) 3. 264 ఘ.సె.మీ
4. 1 : 2 5. 4772 7. 29645 ఘ.సెం.మీ
8. 188.57 చ.మీ 9. 37 సెం.మీ

అభ్యాసము - 10.2

1. 103.71 చ.సెం.మీ 2. 1156.57 చ.సెం.మీ 3. 220 చ.మీ
4. 160 చ.సెం.మీ 5. ₹ 765.6 6. $4 : 4 : \sqrt{5}$
7. $a^2\left(5+\frac{\pi}{2}\right)$ చ.యూనిట్లు 8. 374 చ.సెం.మీ

అభ్యాసము - 10.3

1. 693 కి.గ్రా. 2. శంకువు ఎత్తు = 22.05 సెం.మీ; ఉపరితల వైశాల్యం = 793 చ.సెం.మీ
3. 88.83చ.సెం.మీ 4. 616 చ.సెం.మీ 5. 309.57 చ.సెం.మీ
6. 150 7. 523.9 చ.సెం.మీ

అభ్యాసము - 10.4

1. 2.74 సెం.మీ 2. 12 సెం.మీ 3. 0.714 మీ (71.4 సెం.మీ)
4. 5 మీ. 5. 10 6. 57
7. 100 8. 224

అభ్యాసము - 11.1

1. $\sin A = \frac{15}{17}$; $\cos A = \frac{18}{17}$; $\tan A = \frac{15}{8}$
2. $\frac{527}{168}$ 3. $\cos\theta = \frac{49}{25}$; $\tan\theta = \frac{24}{49}$
4. $\sin A = \frac{5}{13}$; $\tan A = \frac{5}{12}$
5. $\sin A = \frac{4}{5}$; $\cos A = \frac{3}{5}$

7.	(i)	$\frac{47}{62}$	(ii)	$\frac{\sqrt{111}+8}{7}$	
8.	(i)	1	(ii)	0	

అభ్యాసము - 11.2

1.	(i)	$\sqrt{2}$	(ii)	$\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	(iii)	1
	(iv)	$\frac{-1}{3}$	(v)	-1		
2.	(i)	c	(ii)	d	(iii)	b
3.	1		4.	Yes		
5.	QR = $6\sqrt{3}$ సెం.మీ;		PR = 12 సెం.మీ			
6.	$\angle YXZ = 60^\circ$;		$\angle YXZ = 30^\circ$		7. 60^0	

అభ్యాసము - 11.3

1.	(i)	1	(ii)	0	(iii)	0
	(iv)	1	(v)	1		
3.	$A = 24^\circ$		6.	$\cos 15^\circ + \sin 25^\circ$		

అభ్యాసము - 11.4

1.	(i)	2	(ii)	2	(iii)	1
6.	1	8.	1	9.	$\frac{1}{p}$	

అభ్యాసము - 12.1

1.	15 మీ.	2.	$6\sqrt{3}$ మీ.	3.	4 మీ.	
4.	60°	5.	11.55 మీ.	6.	$4\sqrt{3}$ మీ.	
7.	4.1568 మీ.	8.	300 మీ.	9.	15 మీ.	10. 12.99 చ.సెం.మీ

అభ్యాసము - 12.2

1.	టవర్ యొక్క ఎత్తు = $5\sqrt{3}$ మీ;			రోడ్డు వెడల్పు = 5 మీ	
2.	32.908 మీ	3.	1.464 మీ	4.	19.124 మీ
5.	7.608 మీ	6.	10 మీ	7.	51.96 అడుగులు; 30 అడుగులు
9.	200 మీ/సె.	10.	24 మీ		

అభ్యాసము - 13.1

1. (i) 1 (ii) 0, అసంభవఘటన (iii) 1, ఖచ్చిత/ధృడఘటన
   (iv) 1 (v) 0, 1
2. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును (iv) అవును
3. 0.95 4. (i) 0 (ii) 1
5. 0.008 6. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

అభ్యాసము - 13.2

1. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$
2. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{4}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$
3. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$
4. $\frac{5}{13}$ 5. 0.35
6. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1
7. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) $\frac{1}{26}$
   (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{13}$ (vi) $\frac{1}{52}$

8. $\frac{3}{10}$ 9. $\frac{4}{15}$

10. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{4}$

11. $\frac{11}{12}$ 12. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$

13. (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

14. $\frac{11}{21}$ 15. (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

16.

రెండు పాచికలపై సంఖ్యల మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

17. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$

అభ్యాసము - 14.1

1. సగటు చెట్ల సంఖ్య = 8.1
2. ₹ 313 3. $f = 20$ 4. 75.9
5. 22.31 6. ₹ 211 7. 0.099 ppm
8. 49 రోజులు 9. 69.43%

అభ్యాసము - 14.2

1. బాహుళకం = 36.8 సం॥, సగటు = 35.37 సం॥.
2. బాహుళకం 65.625 గంటలు
3. బాహుళకం = ₹ 1847.83, సగటు = ₹ 2662.5.
4. బాహుళకం : 30.6, సగటు = 29.2.

5. బాహుళకం = 4608.7 పరుగులు.

6. బాహుళకం = 44.7 కారులు

అభ్యాసము - 14.3

1. మధ్యగతం = 137 యూనిట్లు, సగటు = 137.05 యూనిట్లు, బాహుళకం = 135.76 యూనిట్లు.

2. $x = 8, y = 7$

3. మధ్యగత వయస్సు = 35.76 సం॥

4. మధ్యగతం పొడవు = 146.75 మి.మీ

5. మధ్యగతం జీవితకాలం = 3406.98 గం॥

6. మధ్యగతం = 8.05, సగటు = 8.32, బాహుళకం = 7.88

7. మధ్యగత బరువు = 56.67 కి.గ్రా.

అభ్యాసము - 14.4

1.

సంపాదన (₹లలో)	సంచిత పౌనఃపున్యం
300 కంటే తక్కువ	12
350 కంటే తక్కువ	26
400 కంటే తక్కువ	34
450 కంటే తక్కువ	40
500 కంటే తక్కువ	50

2.

ఎగువ హద్దులు	300	350	400	450	500
సంచింత పౌనఃపున్యం	12	26	34	40	50

3.

దిగువ హద్దులు	50	55	60	65	70	75
అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	100	98	90	78	54	16

ఉపాధ్యాయులకు సూచన

ప్రియమైన ఉపాధ్యాయులారా !

ఆంధ్రప్రదేశ్ విద్యా ప్రణాళికా పరిధి పత్రం (APSCF-2011) లో సూచించిన అనేక సిఫార్సులలో ప్రధానమైనది పాఠశాలలో విద్యార్థుల అభ్యసనం, "పాఠశాల బయట జీవితం (నిజజీవితం)తో ముడిపడి ఉండాలి" దీని కనుగుణంగా మన రాష్ట్ర ప్రభుత్వం అన్ని పాఠ్యాంశాలలోనూ విద్యా ప్రణాళికను సవరించుటకు నిర్ణయించారు. జాతీయ విద్యా ప్రణాళికా పరిధిపత్రం (NCF-2005)NCERT వారి గణిత ఆధార పత్రం, ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్రప్రభుత్వం సూచనల మేరకు గణిత భావనల అవగాహన, వినియోగాలను మరింత విస్తృత పరచుకోవడానికి, సాధారణీకరణాల ద్వారా అన్వేషణ మరియు గణిత ప్రక్రియలను వారి జీవిత అనుభవాలను జోడించి గణతీకరణం చెందే విధముగా కృషి చేయాలి. ఈ అంశాలు సెకండరీ స్థాయిలో సాధ్యమవుతాయి. 9వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకంను గణిత విద్యా ప్రణాళిక, విద్యా ప్రమాణాలను ఆధారముగా రూపొందించి, సెకండరీ స్థాయి గణితమును పూర్తి చేసే స్థితిలో యున్నాం. ముందు తరగతులలో విద్యార్థులను అమూర్తకీలక భావనలను, ప్రాథమిక అంశాల గణిత సూత్రీకరణ అవగాహన చేసుకొనే విధముగా కృషి చేశాము. గణిత సమస్యలను సాధించడం, ఋజువు చేయడం, మరియు అందులకు అవసరమయ్యే గణిత పరిభాషను వినియోగించే విధముగా నిష్ణాతులను చేశాము. గణిత ప్రవచనములను, సమస్యా విశ్లేషణా సోపానములను పరిపూర్ణంగా గణిత పరిభాషలో సంకేతములనుపయోగించి రాసే విధముగా అవసరమయ్యే నైపుణ్యములను పెంపొందించాము. అందుచే పదవతరగతి పాఠ్యపుస్తకములో విద్యార్థులు గణిత భావనలను, పూర్తిస్థాయిలో అమూర్త భావనలను అవగాహన చేసుకొనే విధముగా పాఠ్యపుస్తక రచనకు ప్రాధాన్యత నిచ్చాము.

పదవతరగతి పాఠ్యాంశముల బోధన, అభ్యసనకు దోహదమయ్యే విధముగా 6వ తరగతి నుండి 10వ తరగతి వరకు గణిత పాఠ్య ప్రణాళికను శీర్షిక మరియు సర్పిల విధానాలపై ఆధారపడి రూపొందించబడినవి. కీలక అమూర్త భావనల స్వభావము, పరిధి మరియు గణిత పరిభాష స్థాయి క్రమేపి పెంచబడినది. స్వీకృతాధార పద్ధతిలో అధ్యయనంను విద్యార్థులకు అలవాటు చేసి, ఈ పద్ధతిలో విద్యార్థుల సౌలభ్యతను పొందే విధంగా కృషిచేశాము. అభ్యసన ప్రక్రియలో విద్యార్థులు ఎదుర్కొనే క్లిష్టతలలో అధిక ప్రాధాన్యము కల్గినది. స్వీకృతాధార అధ్యయనం, గణిత సంకేతముల పరిభాష. అందుచే ఈ పాఠ్యపుస్తకములోని అంశాలు అన్నీ విద్యార్థులు చక్కని స్వేచ్ఛాయుత వాతావరణంలో నేర్చుకొనే విధముగా, విద్యార్థులు చిన్న, చిన్న బృందాలుగా మారి, చర్చించి సమస్యలు సాధించుటకు వీలుగా "ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి" వంటి శీర్షికలను చేర్చాము.

ఈ సిలబస్ నందు పాఠ్యవిషయాలు అన్ని ప్రాథమిక గణిత భావనలు, సాధారణీకరణాల ద్వారా అన్వేషణ, అవగాహనలపై ఊహించి మౌలిక నిర్మాణ విధాన పద్ధతిలో రూపొందించాము. ఈ విధానము బృంద చర్చ, కృత్య ఆధారిత అభ్యసమునకు ప్రాధాన్యత కల్పిస్తుంది.

10వ తరగతి సిలబస్ ప్రధానముగా 1) సంఖ్యావ్యవస్థ 2) బీజగణితం 3) రేఖాగణితం 4) క్షేత్రమితి 5) సాంఖ్యక శాస్త్రం 6) నిరూపక రేఖాగణితము 7) త్రికోణమితి అను 7 రంగాలుగా విభజించబడినది. ఈ రంగాలలోని అంశాలను బోధించుట ద్వారా విద్యార్థులలో సమస్యా సాధన, తార్కిక ఆలోచన, గణిత భాషలో వ్యక్త పరచడం, ఇచ్చిన దత్తాంశమును వేర్వేరు రూపాలలో ప్రాతినిధ్య పరచడం, గణితమును ఒక పాఠ్యాంశముగా మాత్రమే కాకుండా నిజ జీవితమునకు ఆవశ్యకమైన శాస్త్రముగా గుర్తించడమును విద్యార్థులు పొందుతారు.

ఈ పాఠ్యపుస్తకంలో సరళమైనభాష, పదజాలం కలిగి వుండి పిల్లల మేధస్సు, గణిత భావాలను ఉపయోగించుకోవడానికి తద్వారా తామే స్వయంగా గణిత స్వరూపాలను ఏర్పరచుకోవడానికి అవకాశాలను కల్పిస్తుంది. పుస్తకంలో పొందుపరచిన ఇవిచేయండి, ప్రయత్నించండి. ప్రకల్పనలు వంటి అంశాలకు అధిక ప్రాధాన్యత ఇచ్చి పిల్లలు సొంతముగా నేర్చుకొనేలా చేయడానికి, జట్లలో ప్రయత్నించడానికి ఈ పాఠ్యపుస్తకం అవకాశం కల్పిస్తోంది.

"ఇవి చేయండి" ప్రయత్నించండి శీర్షికలతో ఇచ్చిన అభ్యాసములో విద్యార్థులు ఆ పాఠ్యాంశమును ఎంతమేరకు అవగాహన చేసుకున్నారు అనే అంశమును తెలుసుకొనేందుకు దోహదపడతాయి. 'ఇవి చేయండి' శీర్షికలో ఇచ్చిన సమస్యలు పాఠ్యాంశములో చర్చించిన భావనలపై ఆధారపడియుంటాయి. "ప్రయత్నించండి" అను శీర్షికలో ఇచ్చిన సమస్యలు నైపుణ్యములు, భావనల సాధారణీకరణం, భావన సత్యశోధన మరియు ప్రశ్నించుట అను అంశాల ఆధారముగా తయారు చేయబడ్డాయి. 'చర్చించు – ఆలోచించు' అను శీర్షికలో విద్యార్థులు కొత్త భావనలను అర్థము చేసుకొంటారు. వారి సొంత మాటలలో వ్యక్తపరుస్తారు.

10వ తరగతి సిలబస్‌ను 14 అధ్యాయాలుగా విభజించారు. విద్యార్థులు ప్రతి అంశాన్ని కూలంకషముగా అవగాహన చేసుకొనుటకు, హేతుబద్ధంగా ఆలోచించుటకు, అంశాలపై సమగ్రంగా పట్టు సాధించుటకు, సులభముగా నేర్చుకొనుటకు, గణిత అధ్యయనం పట్ల ఆసక్తిని పెంచడానికి దోహదపడుతాయి. రంగుల వర్ణచిత్రాలు, పటాలు, చదవగలిగేలా అక్షరాల సైజు, తగ్గిన పాఠ్య పుస్తకం పేజీల సంఖ్య విద్యార్థులను గణిత పాఠ్యపుస్తకం పట్ల భయం పోగొట్టి స్వయం అభ్యసనానికి ప్రేరేపిస్తుంది.

అధ్యాయం 1 : వాస్తవ సంఖ్యలలో అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం, అకరణీయ సంఖ్యలు, వాటిని దశాంశ రూపములో విస్తరణ, ఆవర్తిత అకరణీయ సంఖ్యలు వివరించబడినవి. కరణీయ సంఖ్యలను గూర్చి సవివరముగా చర్చించాము. మొట్టమొదటిసారిగా ఈ పాఠ్యాంశములో సంవర్గమానములు పరిచయం చేశాం. సంవర్గమానముల ప్రాథమిక న్యాయములు మరియు వాటి అనువర్తనములు వివరించబడినవి.

అధ్యాయము 2 : సమితులు, సెకండరీ స్థాయిలో పూర్తిగా నూతన అధ్యాయం. పూర్వ సిలబస్‌లో 8వ తరగతి నుండి "సమితులు" అధ్యాయం ఉన్నప్పటికీ నూతన విద్యాప్రణాళికలో 10వ తరగతిలో పరిచయం చేయబడింది. ఈ అధ్యాయంలో సమితి నిర్వచనం, సమితులలో రకాలు, వెన్ చిత్రాలు, సమితుల పరిక్రియలు, సమితుల మధ్య వ్యత్యాసములు వివరించబడినవి.

అధ్యాయము 3 : బహుపదులు, 'బహుపది అనగానేమి?' మరియు బహుపదుల పరిమాణము, విలువలను గూర్చి వివరించబడినది. రేఖీయ బహుపదులు. మరియు వర్గ బహుపదులను గ్రాఫు ద్వారా సూచించడం. బహుపది శూన్యాలు మరియు బహుపదిలోని చరరాశి గుణకములు మధ్య సంబంధం గూర్చి వివరించబడినది. ఘన బహుపదిని గూర్చి మరియు భాగహారన్యాయం గూర్చి వివరించబడినది.

అధ్యాయము 4: రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణముల జతతో రేఖీయ సమీకరణముల సాధన, గ్రాఫుతో బీజీయ పద్ధతులనుపయోగించి రెండు చరరాశుల రేఖీయ సమీకరణములను సాధించడం వివరించబడినది.

అధ్యాయము 5 : వర్గ సమీకరణములు, వర్గసమీకరణము భావన, అర్థము, సాధనలు వివరించడమైనది. పరావలయం నుపయోగించి మూలాల స్వభావమును తెలుసుకోవడము వివరించడమైనది.

అధ్యాయము 6: శ్రేఢులు, సెకండరీ స్థాయిలో మొదటిసారిగా ఈ అధ్యాయం పరిచయం చేయడమైనది. ఈ అధ్యాయంలో అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢిలను గూర్చి వివరించడమైనది. శ్రేఢిలో పదముల సంఖ్య, nవ పదము, పదాల మొత్తం చర్చించడమైనది.

అధ్యాయము 7 : నిరూపక జ్యామితి, ఈ అధ్యాయములో రెండు బిందువుల మధ్య దూరం, విభజన సూత్రం (Section formula), త్రిభుజకేంద్రభాసం, త్రిధాకరణ బిందువులను గూర్చి వివరించడమైనది. త్రిభుజవైశాల్యమును 'హెరాన్‌సూత్రము" నుపయోగించి కనుగొనుట వివరించబడినది. సరళరేఖ యొక్క వాలును గూర్చి వివరించడమైంది.

అధ్యాయము 8 : లో సరూప త్రిభుజ ధర్మాలను గురించి, ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం వివరించడమైనది. రెండు త్రిభుజాల సరూపతకు కావల్సిన నియమాలను హేతుబద్ధంగా నిరూపించుటకు తగిన ప్రేరణ కల్గించడమైనది. పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను, దాని విపర్యయమును నిరూపించే పద్ధతులు కూలంకషంగా చర్చించడమైనది.

అధ్యాయం 9 : లో వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ, ఛేదన రేఖలను గూర్చి వివరించడమైనది. ఛేదన రేఖ వలన ఏర్పడిన వృత్తఖండము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుట చర్చించడమైనది.

అధ్యాయం 10 : క్షేత్రమితిలో ఘనకార వస్తువుల సముదాయము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణములను గూర్చి చర్చించడమైనది.

అధ్యాయం 11 మరియు 12 లను సెకండరీ స్థాయిలో నూతనముగా పరిచయము చేయడమైనది. కర్ణము, భుజాల మధ్య సంబంధము ద్వారా త్రికోణమితి నిష్పత్తులను వివరించడము, ఎత్తులు, దూరాలు భావనను దాని అనువర్తనములు వివరించడమైనది.

అధ్యాయము 13 : సంభావ్యత, 9వ తరగతిలో చర్చించిన సంభావ్యతను పరిపుష్టి చేస్తూ నూతన పదముల వివరణ, వాటి భావనలను చర్చించడమైనది.

అధ్యాయము 14: సాంఖ్యాకశాస్త్రంలో, దత్తాంశసేకరణ, దానిని వర్గీకృత దత్తాంశముగా మార్చుట, అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు సగటు, మధ్యగతము మరియు బాహుళకమును కనుగొనుట. అదేవిధముగా వర్గీకృత దత్తాంశమునకు సగటు, మధ్యగతము మరియు బాహుళకములను కనుగొనుట వాటి మధ్య సంబంధం వివరించడమైనది. అనుబంధంగా చేర్చిన "గణితనమూనా విధానాలు" అధ్యయనం ద్వారా విద్యార్థులలో గణిత సమస్యలు సాధనకు తగిన వివిధ నమూనాలను ఎంపిక చేసుకునే అవకాశం కలుగుతుంది. సమస్యలను నిజజీవిత సంఘటనలతో పోల్చి నమూనాలు రూపకల్పన చేయగలుగుతారు.

ఏ పాఠ్యవిషయంలోనైనా విజయసాధన అనేది పాఠ్యప్రణాళిక కంటే ఎక్కువగా ఉపాధ్యాయుడు అవలంభించే బోధనా పద్ధతులపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఒక మంచి పాఠ్యపుస్తకంతో మాత్రమే విద్యార్థులలో గుణాత్మకమైన మార్పులను ఆశించలేం. తరగతి గదిలోనూ ఉత్తమ బోధన మాత్రమే పాఠ్యప్రణాళికకు నూతన అర్థాన్ని కల్పించి వాంఛనీయమైన మార్పులను తేగల్గుతుంది. అందువల్ల గణిత బోధన అంటే అభ్యాసాలను సాధింపచేయడమే కాకుండా మౌలిక భావనలను అవగాహన పెంచడం ద్వారా సమస్య సాధన నైపుణ్యాలు పెంపొందుతాయని గ్రహించాలి. ఇటువంటి మార్పు గణిత బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో రావాలని ఆశిద్దాం.

ప్రతీ పాఠ్యాంశము చివరలో 'మనము నేర్చుకొన్న అంశాలు' అను శీర్షిక ద్వారా 'పునఃశ్చరణ'కు సొంతంగా మరికొన్ని సమస్యలను తయారు చేసి ఇవ్వటము ద్వారా ఈ ప్రక్రియ పరిపుష్టము అవుతుంది.

విద్యార్థులందరూ గణితమును ఆనందంతో నేర్చుకోవడానికి, వారి జీవిత అనుభవాలను జోడించి సమస్యలు రూపొందించడానికి, సాధించడానికి ఈ గణిత పాఠ్యపుస్తకంలో మౌలిక భావనలు తోడ్పడుతాయని ప్రగాఢముగా విశ్వసిస్తున్నాము.

"సంతోషదాయకమైన బోధనకు అంకితమయ్యే మీ అందరికీ శుభాకాంక్షలు"

సిలబస్

I. సంఖ్యా వ్యవస్థ (23 పీరియడ్లు)

(i) **వాస్తవ సంఖ్యలు** (15 పీరియడ్లు)

- అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలతో మరికొన్ని ధర్మాలు
- అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము – ప్రచనాలు
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ .... మొ॥లగు కరణీయ సంఖ్యలపై ఉపపత్తులు మరియు అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపాలు (అంతమొందే దశాంశాలు, అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలు)
- వాస్తవ సంఖ్యల దశాంశాలు (పూర్వజ్ఞానం మరియు ఉదాహరణల ద్వారా నిరూపణలు)
- సంవర్గమానాల పరిచయం
- సంఖ్య యొక్క ఘతాంక రూపం నుండి సంవర్గమాన రూపంలోనికి మార్పు
- సంవర్గమానాల ధర్మాలు $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$
- సంవర్గమాన న్యాయాలు

$$\log xy = \log x + \log y;\ \log \frac{x}{y} = \log x - \log y\ ;\ \log x^n = n \log x$$

- సంవర్గమానాలకు ప్రామాణిక ఆధారాలు, సంవర్గమానాల నిత్యజీవిత అనువర్తనాలు (పరీక్షలకు ద్దేశించబడినవి).

(ii) **సమితులు (8 పీరియడ్లు)**

- సమితులు మరియు వాటి రూపాలు
- శూన్యసమితి, పరిమిత మరియు అపరిమిత సమితులు, విశ్వసమితి
- సమసమితులు, ఉపసమితి, కార్డినల్ సంఖ్య, వియుక్త సమితులు
- వెన్ చిత్రాల ద్వారా సమితులను సూచించుట
- సమితులలో ప్రాథమిక పరిక్రియలు
- సమితుల సమ్మేళనం, ఛేదనం, భేదం

II. బీజగణితము (46 పీరియడ్లు)

(i) బహుపదులు (8 పీరియడ్లు)

- బహుపది యొక్క శూన్యాలు
- బహుపది శూన్యాలకు జ్యామితీయ భావనలు; రేఖీయ, వర్గ, ఘన బహుపదులకు రేఖాచిత్రాలు
- బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య సంబంధము
- బహుపది భాగాహారనియమము (పూర్ణసంఖ్యలు గుణకాలుగా గల సమస్యల సాధన)

(ii) **రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు** (15 పీరియడ్లు)

- నిత్యజీవిత సందర్భాలద్వారా రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలను రూపొందించుట
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలకు రేఖా చిత్రాల ద్వారా సాధనలు కనుగొనుట. వ్యవస్థీకరించబడిన సందర్భాలు గుర్తించుట
- సమీకరణాల సాధనకు తగిన బీజీయ సందర్భాలను తెలుసుకొనుట
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థకు బీజీయ పద్ధతులలో సాధన కనుగొనుట – ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి, చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చగలిగే నిత్యజీవిత సందర్భాలు, సరళ సమస్యలను రూపొందించి, సాధించుట
- బహుపది యొక్క శూన్యాలు

(iii) **వర్గ సమీకరణాలు** (12 పీరియడ్లు)

- వర్గసమీకరణానికి ప్రామాణిక రూపం $ax^2+bx+c=0$, $(a \neq 0)$.

- వాస్తవ సంఖ్యలు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణాలను సాధించుట
  - కారణాంక పద్ధతి – సంపూర్ణ వర్గ పద్ధతి (సూత్రము ఉపయోగించి)
- వర్గ సమీకరణ విచక్షణి ద్వారా మూలాల స్వభావలను తెలుసుకొని సంబంధాలు ఏర్పరచుట
- నిత్యజీవిత సంఘటనల ఆధారమైన వర్గ సమీకరణాల సాధన

(iv) **శ్రేఢులు** (11 పీరియడ్లు)

- అంకశ్రేఢి నిర్వచనం
- అంకశ్రేఢిలో n వ పదము, మొదటి n పదాల మొత్తం కనుగొనుట.
- గుణశ్రేఢి పరిచయం
- గుణశ్రేఢిలో n వ పదము కనుగొనుట.

III. రేఖాగణితం (33 పీరియడ్లు)

(i) **సరూప త్రిభుజాలు** (18 పీరియడ్లు)

- సరూప పటాలు, సర్వసమానత్వంనకు సరూపతకు మధ్యగల తేడా
- సరూప త్రిభుజ ధర్మాలు
- (నిరూపణ) ఒక త్రిబుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరు వేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజింపబడతాయి.
- (ప్రేరణ) ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా నుండును.
- (ప్రేరణ) రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానంగా వుంటే వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తులు సమానముగా వుంటాయి మరియు ఆ రెండు త్రిబుజాలు సరూపాలు (కో.కో.కో)
- (ప్రేరణ) ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు, రెండవ త్రిభుజంలోని అనురూప భుజాలు అనుపాతములో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.భు.భు)
- (ప్రేరణ) ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణానికి సమానమై, ఆ కోణాలను కలిగి వున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు (భు.కో.భు)
- (నిరూపణ) రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానము.
- (ప్రేరణ) ఒక లంబ త్రిభుజములో లంబకోణము కలిగిన శీర్షము నుండి కర్ణానికి లంబము గీసిన, ఆలంబానికి ఇరువైపులా ఏర్పడిన త్రిభుజాలు ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపాలు మరియు అవి ఒకదానికొకటి సరూపాలు.
- (నిరూపణ) ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైన, మొదటి భుజానికి ఎదురుగా వుండే కోణము లంబకోణము మరియు ఆ త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజము అవుతుంది.
- (నిర్మాణం) దత్త రేఖా ఖండంను కోరిన నిష్పత్తిలో విభజించుట (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం ఉపయోగించి)
- (నిర్మాణం) దత్త త్రిభుజానికి ఇచ్చిన స్కేలు ప్రకారము సరూప త్రిభుజాన్ని నిర్మించడం.

(ii) **వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు మరియు ఛేదనరేఖాలు (15 పీరియడ్లు)**

- వృత్త స్పర్శరేఖకు, ఛేదన రేఖకు గల భేదం
- ఛేదన రేఖలచే ఏర్పడు జ్యాలు వృత్తములపై బిందువుకు జరుగుతున్నప్పుడు ఏర్పడే సందర్భాల ద్వారా స్పర్శరేఖను తెలుసుకొనుట.
- (నిరూపణ) ఒక వృత్తముపై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శబిందువు వద్ద వ్యాసార్థానికి లంబముగా ఉంటుంది.
- (నిరూపణ) వృత్తానికి బాహ్యబిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.
- (నిర్మాణము) వృత్తంపై గల దత్త బిందువు నుండి, ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయడం
- ఛేదన రేఖతో ఏర్పడే వృత్త ఖండము
- వృత్తఖండము యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుట (అల్పవృత్తఖండం, అధిక వృత్త ఖండము)

IV. నిరూపక జ్యామితి (12 పీరియడ్లు)

- రేఖీయ సమీకరణాల రేఖాచిత్రాల పునర్విమర్శ ద్వారా నిరూపక రేఖాగణిత భావాలను ఏర్పరుచుట
- రెండు బిందువులు $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ మధ్యదూరము $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

- దత్తరేఖాఖండంను కోరిన నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనుట (అంతర నిష్పత్తి m : n)
- నిరూపక తలంపై ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యము కనుగొనుట.
- రెండు బిందువులను కలిపే రేఖావాలు

V. త్రికోణమితి (23 పీరియడ్లు)

(i) **త్రికోణమితి** (15 పీరియడ్లు)

- లంబకోణ త్రిభుజములో అల్పకోణానికి త్రికోణమితి నిష్పత్తులు అనగా sine, cosine, tangent, cosecant, secant మరియు cotangent.
- 30^0, 45^0, 60^0 కోణాలకు (నిరూపణలతో) త్రికోణమితీయ విలువలు కనుగొనుట.
- త్రికోణమితి నిష్పత్తుల మధ్యసంబధం – పూరక కోణాలకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు
- త్రికోణమితి సర్వసమీకరణాలు

  (i) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, (ii) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, (iii) $\cot^2 A + 1 = \mathrm{cosec}^2 A$.

(ii) **త్రికోణమితి – కొన్ని అనువర్తనాలు** (8 పీరియడ్లు)

- ఊర్ధ్వకోణము మరియు అధ:కోణము (నిమ్నకోణం)
- ఎత్తులు – దూరాలకు సంబంధించిన నిత్యజీవిత సరళసమస్యలు
- ఒక సమస్యలో రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలకు మించకుడాను, ఊర్ధ్వ లేదా నిమ్నకోణాలు 30^0, 45^0 మరియు 60^0 లకు పరిమితమయ్యే వ్రాత సమస్యల సాధన.

VI. క్షేత్రమితి (10 పీరియడ్లు)

(i) **ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు**

- ఏవైనా రెండు ఘనాల కలయికతో ఏర్పడే నూతన ఘనాల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణాలను కనుగొనుట

  (అనగా సమఘనము, దీర్ఘఘనము, క్రమస్థూపము, క్రమ శంఖువు, గోళము మరియు అర్ధగోళములలో ఏవైనా రెండింటితో ఏర్పడేవి)
- రెండు ఘనాకృతులతో ఏర్పడే లోహపు ఘనాలను కరిగించి ఏర్పడే నూతన ఘనాకృతుల ఘనపరిమాణా లను కనుగొనుట.

VII. దత్తాంశ నిర్వహణ (25 పీరియడ్లు)

(i) **సాంఖ్యక శాస్త్రము (15 పీరియడ్లు)**

- అంకగణిత సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకము యొక్క పునర్విమర్శ (అవర్గీకృత దత్తాంశంతో పౌన:పున్యవిభాజనం)
- వర్గీకృత దత్తాంశనకు అంకగణిత సగటు, మధ్యగతము మరియు బాహుళకముల భావనలు
- వర్గీకృత / అవర్గీకృత దత్తాంశములకు అంకగణిత సగటు, మధ్యగతము మరియు బాహుళకములను వివిధ పద్ధతులలో కనుగొనుట.
- కేంద్రీయ స్థాన విలువలను వివిధ సందర్భాలలో వినియోగించుట మరియు సంచిత పౌన్ఃపున్యరేఖా చిత్రాలు

(ii) **సంభావ్యత (10 పీరియడ్లు)**

- సంభావ్యత భావము, నిర్వచనముల పునర్విమర్శ
- నిత్యజీవిత సంఘటనలకు సంబంధించిన సంభావ్యత సమస్యలు (ఏక సంఘటనలను సమితుల భావనతో గణించుట)
- పూరక ఘటనలకు సంబంధించిన భావనలు.

అనుబంధం

గణిత నమూనా విధానాలు (8 పీరియడ్లు)

- గణితంలో నమూనా విధానాల భావన
- నిత్యజీవిత సంఘటనల ఆధారంగా గణిత నమూనాల రూపకల్పన

  (ఉదా: బారువడ్డీ, వాయిదాలు చెల్లించుట మొ॥నవి).

విద్యాప్రమాణాలు

విద్యార్థులు ఒక తరగతిలో ఏమి చేయగలగాలి, ఏం తెలిసి యుండాలో స్పష్టంగా వివరించే ప్రవచనాలను ఆ తరగతి యొక్క 'విద్యాప్రమాణాలు' అంటాము. ఈ విద్యా ప్రమాణాలను కింది విభాగాలుగా వర్గీకరించడమైనది.
గణితంలోని వివిధ పాఠ్యాంశాలు (Content) ద్వారా కింద సూచించిన విద్యాప్రమాణాలు సాధించాలి.

1. **సమస్యా సాధన** — గణిత భావనలు, పద్ధతులను ఉపయోగించడం ద్వారా గణిత సమస్యలను సాధించడం.

(అ) సమస్యలలో రకాలు

పజిల్స్, పదసమస్యలు, పటసమస్యలు, దత్తాంశ అవగాహన – విశ్లేషణ – పట్టికలు– గ్రాఫ్, పద్ధతి ప్రకారం చేయు సమస్యలు మొదలగు రకరకాలుగా గణిత సమస్యలుంటాయి.

సమస్యా సాధన – సోపానాలు

- సమస్యలను చదవడం.
- దత్తాంశంలోని సమాచారం మొత్తాన్ని విడిభాగాలుగా గుర్తించడం.
- అనుబంధ విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్య విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్యలో ఇమిడియున్న గణిత భావనలను అవగాహన చేసుకోవడం.
- లెక్కచేయు పద్ధతి విధానాన్ని ఎంపిక చేయడం.
- ఎంపిక చేసిన పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం

(ఆ) **సంక్లిష్టత**

సమస్య యొక్క సంక్లిష్టత అనునది కింది అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

- అనుసంధానం చేయడం (ఇది అనుసంధానం విభాగంలో నిర్వచించనైనది)
- సమస్యలో ఉన్న సోపానాల సంఖ్య.
- సమస్యలోఉన్న ప్రక్రియల సంఖ్య.
- సమస్యా సాధనకు ఇవ్వబడిన సందర్భ సమాచారం ఏ మేరకు ఉన్నది?
- సమస్య సాధించే పద్ధతి యొక్క సహజత్వం

2. **కారణాలు చెప్పడం – నిరూపణ చేయడం**

- దశల వారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించడం.
- గణిత సాధారణీకరణలను మరియు ప్రకల్పనలను అర్థం చేసుకోవడం మరియు చేయగలగడం.

- పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడం మరియు సరిచూడడం.
- తార్కిక చర్చలను పరీక్షించడం.
- సమస్యా నిరూపణలోని క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడం.
- ఆగమన, నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడం.
- గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించడం

3. **వ్యక్తపరచడం**

- గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవగలగడం - రాయగలగడం.

ఉదా : $3+4=7$

$n_1+n_2= n_2+n_1$

త్రిభుజములోని మూడుకోణముల మొత్తం = 180°

- గణిత వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడం.
- గణితపరమైన ఆలోచనలను తన స్వంతమాటల్లో వివరించడం. ఉదా:చతురస్రం అనునది నాలుగు సమాన భుజాలు మరియు నాలుగు సమాన కోణాలు గల సంవృత పటం.
- పద్ధతిని వివరించడం. ఉదా: రెండంకెల సంఖ్యలను కూడడంలో మొదటి ఒకట్లస్థానం అంకెలను కూడడం/స్థానమార్పిడిని గుర్తుకు తెచ్చుకుంటూ
- గణిత తార్కికతను వివరించడం.

4. **అనుసంధానం**

- అనుబంధ గణిత పాఠ్యవిభాగాలను - భావనలను అనుసంధానం చేయడం. ఉదా: గుణకారానికి, కూడికకు; మొత్తంలో భాగానికి - నిష్పత్తికి - భాగహారానికి; అమరికలకు - సౌష్ఠవమునకు; కొలతలు మరియు తలము/అంతరాళం
- దైనందిన జీవితానికి గణితానికి అనుసంధానం చేయడం.
- వేర్వేరు సబ్జక్టులతో గణితాన్ని అనుసంధానం చేయడం.
- గణితంలోనే వేర్వేరు పాఠ్యాంశాలకు సంబంధించిన భావనలను అనుసంధానం చేయడం, ఉదా: దత్తాంశసేకరణ మరియు అంక గణితం; అంకగణితం మరియు ప్రదేశం.
- భావనలను, బహుళ పద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం

5. **దృశ్యీకరణ మరియు ప్రాతినిధ్య పరచడం**

- పట్టికలోని సమాచారం, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మ చిత్రం, 2D-పటాలు, 3D-పటాలు మరియు పటాలను చదవడం.
- పట్టికలను రూపొందించడం, సంఖ్యారేఖపై చూపడం, పటచిత్రములు, దిమ్మ చిత్రములు, పటాలను గీయడం.